Poliedri e solidi platonici

di Paola Magrone

Dicembre, 2010

1 Poliedri e solidi platonici

La parola poligono deriva dall'unione di due parole greche, che significano *molti angoli*, infatti un poligono è una figura piana delimitata da un certo numero finito di lati. Anche il termine poliedro deriva dall'unione di due parole greche, *polys*=molti, *édron*= faccia, pertanto lo possiamo definire come un solido delimitato da faccie piane e lati dritti. Le *facce* sono le parti piane del poliedro, gli *spigoli* sono i segmenti che delimitano le facce, i *vertici* sono le punte da cui si dipartono gli spigoli.
Un solido viene detto poliedro regolare quando le facce siono tutte costituite dallo stesso poligono regolare e i *vertici* hanno tutti lo stesso grado, ovvero da ciscun vertice part lo stesso numero di spigoli.
Un cubo, un tetraedro sono poliedri regolari, un diamante tagliato per essere montato su un gioiello è un tipo di poliedro; un pallone da calcio è ancora un poliedro, non propriamente regolare: contiene due tipi di facce, pentagoni ed esagoni.
I poliedri regolari sono anche detti sono solo cinque, sono conosciuti e studiati dall'antichitá, e sono infatti detti Solidi Platonici (figura 1).

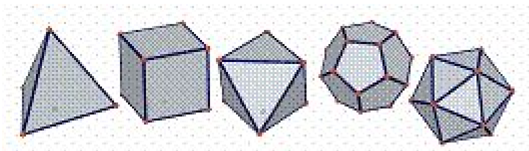

Figura 1: I 5 solidi platonici

Platone ne associó quattro a quelli che al suo tempo erano ritenuti gli elementi fondamentali della natura: fuoco (tetraedro), terra (cubo), aria (ottaedro), acqua (icosaedro). Il dodecaedro, quinto solido regolare, viene descritto da Platone nel Timeo dicendo che .... Dio se ne giovó per decorare l'universo.
Ogni poliedro regolare è caratterizzato da un *simbolo di Schläfli*, $\{p, q\}$ dove p indica che le facce del solido sono p-goni e q è il grado dei vertici, ovvero in ogni vertice si incontrano q facce. Il numero minimo di lati di un poligono è 3, pertanto $p \geq 3$, cosí come $q \geq 3$ perché in uogni vertice devono incontrarsi almeno 3 facce. I numeri $\{p, q\}$ sono strettamente collegati con il numero di vertici , spigoli e facce di un poliedro, come vederemo tra breve.

1.1 La formula di Eulero

La Formula di Eulero è una legge matematica che accomuna in modo preciso tutti i solidi regolari, e molti altri del tutto irregolari, stabilendo una relazione tra il numeri degli spigoli

, dei vertici e delle facce. Sottraendo il numero degli spigoli (S) al numero dei vertici (V) e sommando poi le facce (F), si ottiene sempre 2, ovvero

$$V - S + F = 2 \tag{1.1}$$

È la somma a segni alternati del numero di elementi a dimensione zero (i vertici), di quelli unidimensionali (i lati) e di quelli bidimensionali (le facce). La Formula di Eulero vale per tutti i poliedri *semplici*, o meglio *semplicemente connessi*, vale a dire quei solidi sulla cui superficie è possibile disegnare una linea chiusa e, deformandola, ridurla ad un punto. In altre parole sono semplicemente connessi (o semplici) quei solidi che non hanno buchi; il cubo è un esempio di solido semplicemente connesso, il toro non è semplice perché ha un buco, e non tutte le cuve chiuse giacenti sulla superficie del toro possono essere ridotte ad un singolo punto. (vedi figura 2).

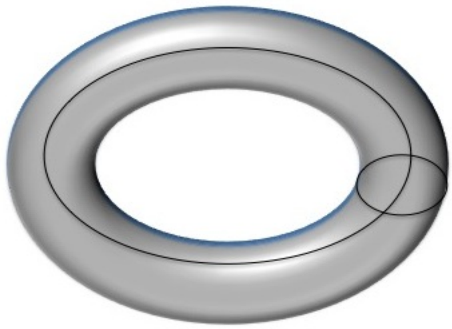

Figura 2: Il toro non è semplicemente connesso

Il fatto che i poliedri regolari siano solo 5 è una conseguenza di questa formula, da cui discendono anche altre notevoli proprietá geometriche dei solidi semplicemente connessi.

Diamo ora due dimostrazioni della Formula di Eulero:

Dimostrazione 1.1 *1 (cfr [**?**]) Costruiamo un poliedro (semplicemente connesso) partendo da una faccia, che avrá n spigoli e n vertici. Per questa faccia vale $V-S+F = n-n+1 = 1$. Attacchiamo una seconda faccia, avente m spigoli e m vertici alla prima, facendo coincidere due spigoli. A questo punto rifacciamo il conto di vertici meno spigoli piú facce: aggiungiamo una faccia, m spigoli e m vertici, togliamo uno spigolo perché è in comune con la prima faccia e due vertici perché sono in comune anch'essi con la prima faccia.*

$$F = 2,\ V = n + (m-2), S = n + (m-1) \ \Rightarrow\ F + V = S + 1.$$

La relazione rimane ancora invariata. Andando avanti aggiungendo facce, ovviamente sempre incollandole su uno o piú spigoli delle facce preesistenti, con i vertici coincidenti, come varia la formula (se varia?)? Ad ogni passo aggiungiamo 1 *al numero delle facce, tanti spigoli quanti vertici (ad esempio p), poi sottraiamo il numero q di spigoli comuni alle altre facce, e $q+1$ vertici. In formule (le quantitá tra parentesi tonde sono le ultime aggiunte):*

$$F + V = S + 1 \ \Rightarrow F + (1) + V + (p - (q+1)) = S + (p-q) + 1 \ \Rightarrow\ F + V = S + 1.$$

Supponiamo ora di essere arrivati a dover aggiungere un'ultima faccia per chiudere il poliedro: come varia la formula? L'ultima faccia chiude il poliedro, quindi stiamo in realtá aggiungendo solo 1 *al numero delle facce, mentre gli spigoli e tutti i vertici sono in comune con le facce preesistenti. Pertanto la formula, che fino ad ora era rimasta inalterata, diventa*

$$F + V = S + 2$$

ovvero la tesi. □

Dimostrazione 1.2 *2 (cfr [?])*
Questa seconda dimostrazione della formula di Eulero procede a ritroso rispetto alla precedente.

Pensiamo ad un poliedro semplice, ovvero senza buchi, vuoto al suo interno e fatto di gomma, immaginiamo poi di togliere una faccia e deformare il poliedro, senza perdere la nozione di vertici, spigoli e facce, fino a distenderlo su un piano. La figura piana che abbiamo ottenuto avrá un poligono in meno rispetto al poliedro di partenza (abbiamo asportato una faccia), le aree delle facce e la lunghezza degli spigoli saranno deformate da questa trasformazione, ma il numero di vertici e spigoli sará lo stesso.

Il passo successivo consiste nel triangolare il reticolo che abbiamo ottenuto: per ogni poligono, che non sia un triangolo, tracciamo una diagonale. Questa operazione aggiunge 1 *sia al numero degli spigoli che a quello delle facce e nessun vertice, pertanto il valore di* $V - S + F$ *non cambia. Continuiamo a tracciare diagonali fino a che il reticolo non sará costituito solo da triangoli. Il valore di* $V - S + F$ *è rimasto costante per quanto detto sopra.*

Alcuni dei triangoli hanno un lato sul perimetro esterno del reticolo (figura .., triangolo ABC*), altri ne hanno due. Prendiamo un triangolo che abbia un solo lato sul contorno, asportiamo proprio il lato esterno. Poiché questo lato non sará comune ad altri triangoli (è sul perimetro!), nel fare questa operazione avremo tolto uno spigolo e una faccia, senza variare il numero dei vertici; la quantitá* $V - S + F$ *é ancora inalterata. Scegliamo ora un triangolo che abbia due lati (figura..., triangolo* DEF*) sul perimetro esterno. Asportando i due lati esterni, togliamo anche una faccia e un vertice, quello da cui partivano i lati che bbiamo eliminato. Pertanto questa operazione fa diminuire* V *di uno,* S *di due e* F *di uno, per l'alternanza dei segni ancora una volta la quantitá espressa da* $V - S + F$ *non varia.*

Procediamo togliendo via triangoli. Rimarremo con un solo triangolo, per il quale $V-S+F = 1$*. Dato che la quantitá* $V - S + F$ *non è mai variata, a partire dal momento in cui abbiamo tolto la prima faccia al poliedro di partenza, anche per il reticolato piano si ha* $V-S+F = 1$*. Pertanto la formula* $V - S + F$ *vale* 1 *per un poliedro a cui abbiamo tolto una faccia. Riaggiungendo una faccia otteniamo* $V - S + F = 2$ *per un qualunque poliedro semplice.* □

I solidi platonici sono studiati da piú di duemila anni, cos'hanno di particolare? Platone ne aveva osservato ed apprezzato la regolaritá, ora grazie alla formula di Eulero possiamo affermare con sicurezza che non vi sono altri solidi regolari. E' un fatto notevole, se pensiamo che al contrario i poligoni regolari sono infiniti! Infatti preso un qualunque numero intero n, possiamo costruire il poligono regolare di n lati, a condizione unicamente di avere molta pazienza se il numero di lati è grande!

Dimostriamo che i solidi regolari sono solo 5 :

Consideriamo un solido regolare, caratterizzato dal simbolo $\{p, q\}$. Vale la relazione

$$qV = 2S = pF.$$

In ogni vertice arrivano q spigoli, ma ogni spigoli è comune a due vertici, pertanto contando q spigoli per ogni vertice abbiamo contato tutti gli spigoli due volte ($qV = 2S$). D'altra parte ogni faccia ha p lati, contando p lati per ciascuna faccia contiamo in realtá tutti i lati due volte perché uno spigolo è comune a due facce ($2S = pF$). Ora cerchiamo di esprimere V, S, F in funzione di p e q.

$$V = \frac{2S}{q};\ F = \frac{2S}{p} \ \Rightarrow\ \frac{2S}{q} - S + \frac{2S}{p} = 2;$$

sommando i termini nell'ultima equazione si ottiene

$$\frac{2p - qp + 2q}{2qp} = \frac{1}{S} \;\Rightarrow\; S = \frac{2qp}{2p - qp + 2q}. \tag{1.2}$$

Possiamo adesso ricavare le espressioni di V, F in funzione di p, q :

$$V = \frac{4p}{2p - qp + 2q},\; F = \frac{4q}{2p - qp + 2q}. \tag{1.3}$$

I valori di V, S, F devono essere positivi, pertanto $2p - qp + 2q > 0$, che si puó riscrivere come

$$(p-2)(q-2) < 4.$$

Quindi affinché $(p-2)$ e $(q-2)$ siano interi positivi il cui prodotto sia minore di 4, le uniche possibilitá sono:

$$1 \cdot 1,\quad 1 \cdot 2 \;\; 2 \cdot 1 \;\; 1 \cdot 3 \;\; 3 \cdot 1,$$

i valori di $\{p, q\}$ corrispondenti sono:

$$\{3,3\},\; \{3,4\},\; \{4,3\},\; \{3,5\},\; \{5,3\},$$

per questi valori di p e q le frazioni che appaiono nelle formule (1.2)-(1.3) danno come risultato numeri interi. Le coppie di numeri individuate corrispondono ai solidi platonici, ovvero tetraedro, ottaedro, cubo, icosaedro, dodecaedro.

1.2 Il principio di dualitá

Il duale di un poliedro è un altro poliedro, ottenuto dal precedente scambiando il ruolo di vertici e facce, vicendevolmente. In altre parole per costruire il duale di un poliedro si prendono i centri delle facce, si unisce ogni centro con tutti i centri delle facce adiacenti, e cosí facendo si ottiene un solido che ha tanti vertici quante erano le facce del precedente, e tante facce quanti erano i vertici. Quali sono i duali dei solidi platonici: cubo e ottaedro sono duali tra loro, cosí come dodecaedro e icosaedro. Il tetraedro è duale di sé stesso (autoduale).

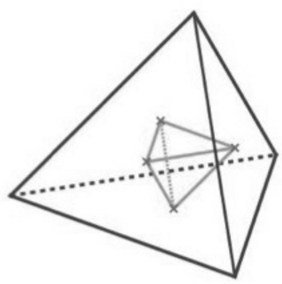

Figura 3: Il tetraedro e il suo duale

Il duale si puó costruire a partire da qualunque poliedro. Osservando un poliedro possiamo subito ricavare delle informazioni su come sará il suo duale: il grado dei vertici ci dice come saranno le facce, e se il solido di partenza possiede vertici di grado diverso, si capirá quali saranno el diverse facce del duale.

Un poliedro e il suo duale hanno in comune il Gruppo di simmetria: per costruzione, qlunque movimento che lasci invariato un solido,

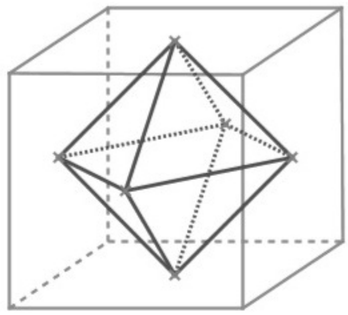

Figura 4: Il cubo e il suo duale, l'ottaedro

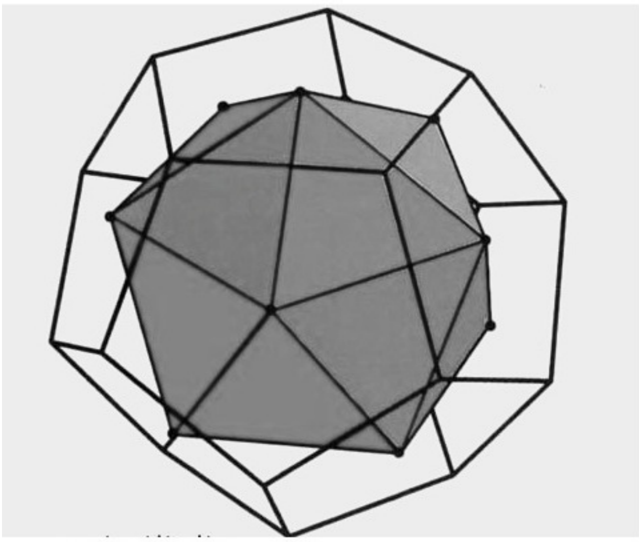

Figura 5: Il dodecaedro e il suo duale, l'icosaedro

1.3 L'invarianza topologica

La formula di Eulero è un *invariante topologico*. La Topologia studia le proprietá che le figure mantengono quando vengono deformate, anche molto, senza peró venire bucate o strappate (queste deformazioni sono le trasformazioni topologiche, di cui si dá una defnzione rigorosa piú avanti). Un altro modo per definire cosa studia la topologia è dire che la topologia è lo studio di cioó che sta dentro e ció che sta fuori. Dato un cilindro è assolutamente evidente dire cosa sta dentro e cosa sta fuori dal cilindro. Non si puó fare lo stesso con un nastro di Mobius, non è altrettanto evidente. Infatti il cilindro e il nastro di Mobius sono topologicamente diversi.

Quindi possiamo prendere una palla di pongo, trasformarla, appiattendola, in un tetraedro, per poi passare ad un serpente, se il tutto avviene senza operare tagli e strappi la trasformazione rientra nel novero delle trasformazioni topologiche (quindi una palla é topologicamente equivalente ad un tetraedro e ad un serpente!).

Nel dimostrare la formula di Eulero per i poliedri nulla sarebbe cambiato se avessimo considerato oggetti con lati curvilinei , tenendo sempre presente il numero di vertici, spigoli e facce. Notiamo anche che la formula non prende mai in considerazione le distanze tra punti, quindi si candida in modo naturale ad essere un invariante topologico.

Definizione 1.1 *Due spazi X e Y si dicono topologicamente equivalenti se esiste una funzione*

$$f:\ X \to\ Y$$

continua, biunivoca con inversa continua.

La funzione citata nella definizione precedente è detta anche *omeomorfismo*. Per questo motivo due spazi topologicamente equivalenti vengono anche detti omeomorfi. La deformazione di cui si parlava prima altri non è che una versione intuitiva dell'omeomorfismo.

Gli omeomorfismi godono delle tre proprietá seguenti ([**?**])(di facile dimostrazione):

(1) l'identitá $I:\ X \to\ X$ è un omeomorfismo;

(2) se $f:\ X \to\ Y$ è un omeomorfismo, allora $f^{-1}:\ Y \to\ X$;

(3) se $f:\ X \to\ Y$ e $g:\ Y \to\ Z$ sono omeomorfismi, allora anche $g \circ f:\ X \to\ Z$ è un omeomorfismo.

Queste tre proprietá messe insieme fanno sí che l'equivalenza topologica sia una relazione di equivalenza tra spazi topologici.

Uno degli esempi tipici di equivalenza topologica tra figure è la seguente: un *toro*, ovvero una ciambella con un buco, è topologicamente equivalente ad una tazza con il manico (figura 6).

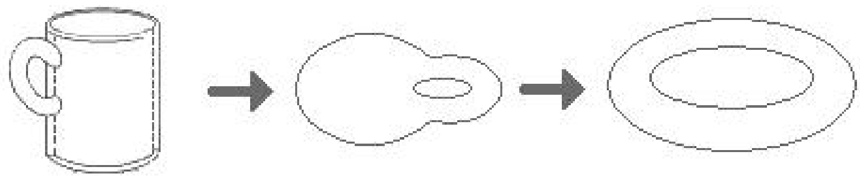

Figura 6: Equivalenza topologica di un toro e una tazza

1.4 I Gruppi di simmetria dei poliedri

Il concetto di simmetria si applica a figure piane, come i poligoni, cosí come ai poliedri. Osservando un poligono si puó procedere ad analizzare ed enumerare le isometrie che lo lasciano invariato: queste isometrie si compongono, come sappiamo, in strutture matematiche astratte dette *Gruppi*. Nel capitolo (Gli strumenti) vengono analizzati i gruppi di simmetria dei poligoni regolari, per arrivare a descrivere quelle dei poliedri, i quali, essendo figure tridimensionali presentano gruppi di simmetria piú ampi e complicati. Infatti, mentre le possibili isometrie del piano sono traslazioni, rotazioni, riflessioni (rispetto ad un asse) e glissoriflessioni, nello spazio si hanno: traslazioni, rotazioni, rfilessioni (rispetto ad un piano), glissoriflessioni (composizione di riflessione e traslazione, con direzione parallela al piano di riflessione), glissorotazioni, rotoriflessioni (composizione di una rotazione con una riflessione rispetto a un piano perpendicolare all'asse di rotazione). Quindi, essendoci piú possibilitá, chiaramente i gruppi di simmetria hanno molti piú elementi rispetto a quelli dei poligoni regolari. Poiché in questa sezione abbiamo a che fare con figure singole, che non tassellano lo spazio, chiaramente non avremo a che fare con i movimenti che includano le traslazioni. Inoltre il gruppo di simmetria di un poliedro e del suo duale conincidono. Pertanto per conoscere i gruppi di simmetria dei 5 solidi platonici, sará sufficiente studiarne 3.

Ci sará utile tenere presente la seguente proprietá dei gruppi *l'ordine di un sottogruppo di un gruppo finito G divide l'ordine del gruppo G* (Teorema di Lagrange).

Il gruppo di simmetria del tetraedro Come accade per le simmetrie che agiscono su figure piane, ogni simmetria del tetraedro induce una permutazione dei 4 vertici, quindi il gruppo di simmetria del tetraedro è un sottogruppo di S_4, il gruppo delle permutazioni di 4 elementi, che contiene esattamente 24 elementi. Analizziamo le rotazioni: asse passante per un vertice e il centro della faccia opposta, la rotazione minima $\varrho_{\frac{2}{3}}$ è di $\frac{2}{3}\pi$, ci sono 4 assi, quindi, cosiderando che il periodo è tre ($\varrho_{\frac{2}{3}}^3 = id$), si hanno 8 movimenti piú l'identitá. Asse passante per il centro di due spigoli opposti, rotazione minima $\varrho_{\frac{1}{2}}$ di π, ci sono 3 assi, quindi altri tre movimenti. Abbiamo considerato al momento tutte le possibili rotazioni, sono 12, compresa l'identitá. Formano un sottogruppo, l'ordine essendo 12 divide l'ordine del gruppo S_4, quindi i conti tornano! Cerchiamo i piani di riflessione: ce ne sono 6, uno per ogni piano passante per uno spigolo e il punto medio dello spigolo opposto. Sono altri 6 elementi, che sommati alle rotazioni fanno un totale di 18. A questo punto l'algebra ci viene in aiuto: 18 non divide 24, e non c'è un divisore di 24 piú grande di 18, quindi l'ordine del gruppo di simmetria del tetraedro deve necessariamente essere 24. Mancano 6 movimenti che sono delle rotoriflessioni. Non sono la composizione di rotazioni e riflessioni giá presenti nel gruppo. Infatti si tratta di comporre una rotazione di $\frac{\pi}{2}$ in verso orario e antiorario attorno a uno dei tre assi di rotazione di π precedentemente individuati (due rotazioni per tre assi = 6 movimenti), e una riflessione rispetto al piano perpendicolare all'asse appena descritto e passante per il baricentro del tetraedro (figura 7).

Il gruppo di simmetria del cubo e dell'ottaedro Il sottogruppo delle rotazioni del cubo è isomorfo a S_4, il gruppo delle permutazioni di 4 elementi: infatti ogni rotazione induce una e una sola permutazione delle 4 diagonali (che uniscono vertici opposti) del cubo. Quindi sappiamo di dover cercare 24 rotazioni. Assi che passano per il centro di due facce opposte: la rotazione minima è $\frac{\pi}{2}$, per ogni asse ci sono tre rotazioni (la quarta è sempre l'identitá!), gli assi sono 3, quindi queste rotazioni in totale sono 9, piú l'identitá. Assi che passano per il punto medio di due spigoli opposti: la rotazione minima è π, gli assi di questo tipo sono 6, quindi i movimenti individuati sono 6 (n.b.:le rotazioni di π hanno periodo due, quindi generano l'identitá ogni volta che una rotazione viene fatta due volte!). Assi che passano per due vertici opposti: la rotazione minima è di $\frac{2}{3}\pi$, (attenzione!) per ogni asse ci sono quindi due rotazioni, gli assi di questo tipo sono 4, in totale 8 movimenti. Sommiamo tutte

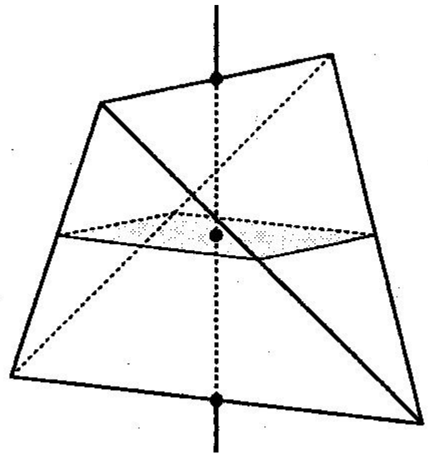

Figura 7: Una delle simmetrie del tetraedro: composizione di una rotazione e una riflessione

le rotazioni che abbiamo trovato: $9 + 6 + 8 + 1 = 24$, le abbiamo trovate tutte.

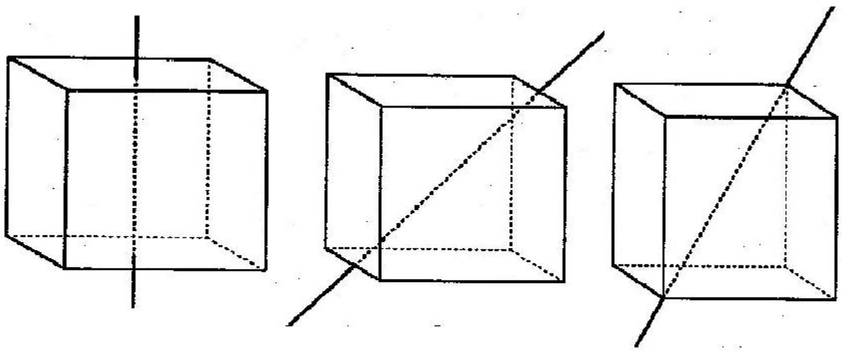

Figura 8: I possibili assi di rotazione del cubo

Passiamo alle riflessioni, cerchiamo quindi i possibili piani. Piani paralleli alle facce e passanti per il centro del cubo: tre piani, quindi 3 riflessioni. Piani passanti per le diagonali delle facce (includono gli spigoli opposti, due a due): 6 piani, quindi 6 riflessioni. Il totale delle riflessioni è 9.

Mancano le rotoriflessioni (figure 9, 10). Componendo una riflessione rispetto ad uno qualunque dei piani di riflessione giá individuati, con una rotazione di π, si ottiene una simmetria del cubo che possiamo chiamare movimento antipodale perché scambia tra loro tutti i vertici opposti. E' da considerare un unico movimento. Ora possiamo comporre tutte le rotazioni giá trovate con una riflessione il cui piano di simmetria sia ortogonale all'asse di rotazione, facendo attenzione a non contare le composizioni con rotazioni di π perché si genera unicamente il movimento antipodale, che abbiamo giá considerato! Quindi: rotazione di $\frac{\pi}{2}$ attorno a uno degli assi che passano per il centro di due facce opposte composta con riflessione rispetto a un piano ortogonale a tale asse e passante per il centro del cubo. Due rotazioni per ogni asse ($\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$), gli assi sono tre, quindi queste rototraslazioni sono 6.

Le rotazioni di π con assi che passano per il punto medio di due spigoli opposti non le consideriamo perché come giá detto se composte con una riflessione generano il movimento antipodale. Rotazioni di $\frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}$ con assi che congiungono due vertici opposti: le rotazioni sono due per ogni asse (escludiamo $k = 1$), gli assi sono 4, quindi i movimenti generati componendo con una riflessione sono 8. Le rotoriflessioni in totale sono $1 + 6 + 8 = 15$.

Contando adesso tutte le isometrie che lasciano invariato un cubo, si arriva a 48. Questo gruppo è isomorfo a $S_4 \times \mathbb{Z}_2$.

Il gruppo di simmetria dell'ottaedro è identico a quello del cubo. Per capire come sono messi gli assi di rotazione e i piani di riflessione basta tenere presente che alle facce del cubo corrispondono i vertici dell'ottaedro, e viceversa.

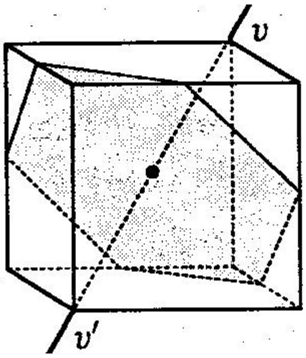

Figura 9: Asse e piano per il primo tipo di rotoriflessione del cubo

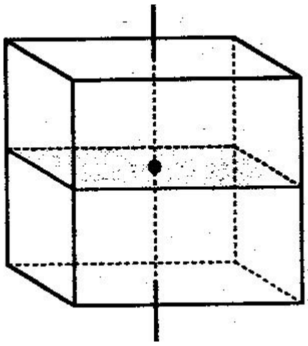

Figura 10: Asse e piano per il secondo tipo di rotoriflessione del cubo

Il gruppo di simmetria dell'icosaedro e del dodecaedro Questo gruppo contiene molti elementi (ben 120!!), per capire come stanno le cose è consigliabile, se non necessario, avere a portata di mano un modello tridimensionale di icosaedro o dodecaedro. Iniziamo ad enumerare le rotazioni. Il sottogruppo delle rotazioni anche in questo caso è isomorfo al gruppo di permutazioni S_5 su cinque elementi. I cinque elementi che vengono permutati sono i 5 cubi che sono inscritti nell'icosaedro: ogni rotazione induce una unica permutazione. Non è facile visualizzare questi cinque cubi, ma è d'aiuto comunque sapere che gli elementi da cercare sono 60.

Assi passanti per due vertici opposti, la rotazione minima è di $\frac{2\pi}{5}$, ci sono 6 assi di questo tipo, quindi le rotazioni che dobbiamo contare sono 24. Assi passanti per i punti medi di due spigoli opposti, rotazione minima di π, gli assi sono 15, quindi ci sono 15 rotazioni rispetto a questi assi. Assi passanti per i centri di due facce opposte, rotazione minima di $\frac{2\pi}{3}$, ci sono dieci assi di questo tipo, quindi in tutto 20 rotazioni. Contando tutte le rotazioni, includendo anche l'indentitá siamo arrivati a 60. Ognuno di questi sottoinsiemi di rotazioni è un sottogruppo ciclico.

Le riflessioni: iniziamo dai piani passanti per due spigoli opposti, ci sono 15 coppie di spigoli opposti, quindi 15 riflessioni. Poi ci sono le rotoriflessioni. Asse passante per due vertici opposti, rotazione minima $\frac{2\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$, (non è un errore, la rotazione minima in questo caso non è, da sola, una delle simmetrie dell'icosaedro) composta con la riflessione rispetto ad un piano ortogonale. Le rotazioni sono 5, gli assi sono 6 quindi avremmo 30 movimenti. Va considerato che per $k = 2$ si ottiene il movimento antipodale, che va contato solo una volta, quindi in totale queste rotoriflessioni sono 25. Infine, asse passante per i centri di due facce opposte, rotazione minima $\frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}$ ovviamente $k = 0, 2$. Gli assi in questione sono 10, questi sono gli ultimi 20 elementi del gruppo. Il totale fa 120. Questo gruppo è isomorfo a $A_5 \times \mathbb{Z}_2$.

1.5 Rettangoli aurei dentro un icosaedro

L'icosaedro puó essere facilmente costruito con riga compasso e poco altro. Ricordiamo cosa è un rettangolo aureo: è un rettangolo i cui lati sono in una particolare proporzione detta *aurea*. Piú precisamente in un rettangolo aureo il cui lato corto chiamiamo L, e il lato lungo ϕ, la proporzione che sussiste tra i due lati è la seguente:

$$\phi : L = L : (\phi - L) \qquad (*)$$

da cui si ricava che il lati L e ϕ verificano l'equazione $\phi^2 - \phi L - L^2 = 0$.

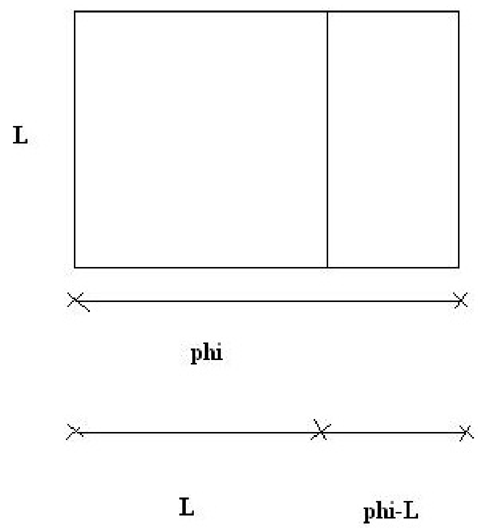

Figura 11: Un rettangolo aureo

Prendiamo tre rettangoli aurei e incastriamoli in modo simmetrico ognuno ortogonale agli altri due (figura 12). I 12 vertici dei rettangoli sono quelli di un icosaedro, ovvero, unendo ciascuno con i 5 adiacenti (volendo con un filo, se si è realizzato il modello concretamente) si ottiene una figura composta da 20 triangoli, equilateri e tutti uguali tra loro. Non è difficile dimostrare l'ultimo asserto.

La figura che si viene a creare incastrando i tre rettangoli è molto simmetrica ed è sufficiente dimostrare che uno dei triangoli che si formano è equilatero, il resto si dimostra per simmetria (grande concetto!).

Prendiamo la figura 13 come riferimento e osserviamo il triangolo ABC, con M indichiamo il punto medio della base, con D il piede della perpendicolare dal vertice A. Il lato corto del rettangolo aureo, che misurerá L, è la base del triangolo. Il segmento AD misura esattamente $\frac{\phi}{2}$, mentre MD misura $\frac{\phi-L}{2}$. Possiamo calcolare AM con il teorema di Pitagora:

$$AM^2 = MD^2 + AD^2 = \left(\frac{\phi}{2}\right)^2 + \left(\frac{\phi - L}{2}\right)^2 = \frac{\phi^2}{4} + \frac{\phi^2 + L^- 2L\phi}{4}.$$

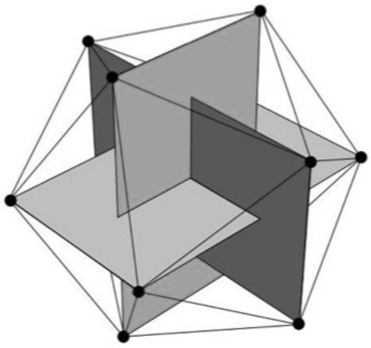

Figura 12: I tre rettangoli aurei dentro un icosaedro

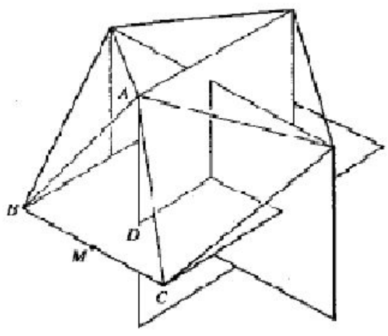

Figura 13: Dimostrazione del fatto che tutti i triangoli sono equilateri

Usando l'equazione che lega le quantitá ϕ e L, si ricava che $AM^2 = \frac{3}{4}L^2$, quindi $AM = \frac{\sqrt{3}}{2}L$. Allora il triangolo ABC è certamente equilatero, perché $AM = L \sin \frac{\pi}{3}$, che non è altri che la relazione che intercorre tra lati e altezza di un triangolo equilatero. Per simmetria tutti i triangoli sono uguali tra loro, basta osservare con attenzione la figura 13.

Questa semplice costruzione rende particolarmente facile capire e calcolare le misure di un icosaedro: ad esempio il suo ingombro! Quanto è alto un icosaedro di lato L? E' alto come il rettangolo aureo che si costruisce a partire dal lato, quindi il lato è la sezione aurea dell'altezza!