

## ISTITUZIONI di MATEMATICA 2 PROGRAMMA D' ESAME A.A. 2001-2002

### ANCORA VALIDO PER TUTTI GLI STUDENTI DELLA LAUREA QUINQUENNALE

(corso di 120 ore frontali = 8 CFU)

A.A. 2001-2002 ; docenti: Laura Tedeschini Lalli, Federico Incitti

[Dispense in rete](#) (geometrie localmente euclidee)

#### 1. Introduzione alle geometrie non-euclidee.

La sfera. La distanza sulla sfera, caratterizzazione delle “geodesiche”, o “rette”.

Osservazioni locali e globali sulla sfera:

-figure piane sulla sfera e loro proprietà.

-differenze, osservabili localmente, tra geometria della sfera ed euclidea: relazione tra raggio e circonferenza, angoli interni

di figure regolari (controesempio di Saccheri).

-differenze globali: possibili mutue posizioni delle “rette”.

Geometrie localmente euclidee su superfici bidimensionali:

Il cilindro, il nastro di Mobius, il cilindro avvitato, il toro  $T^2$ . Per ciascuna geometria:

-costruzione per identificazione dei bordi di una porzione di piano;

-costruzione come spazio quoziente di una relazione di equivalenza nel piano, e relativa “tassellazione” del piano;

-rappresentazione come superficie immersa nello spazio tridimensionale (l' oggetto).

-la nozione di “distanza”, le geodesiche, o “rette”, nelle tre rappresentazioni di ciascuna geometria. Mutua posizione delle “rette” nelle varie geometrie: rette parallele e intersezioni di rette nelle varie geometrie. Compatibilità delle osservazioni locali su ciascuna geometria con quelle sul piano euclideo: le geometrie sono “localmente euclidee”. Coordinate intrinseche ad una superficie.

Per il toro: densità delle rette a pendenza irrazionale.

#### 2. Algebra astratta e geometria nel piano.

Relazioni di equivalenza, classi di equivalenza, spazio quoziente.

Insiemi numerici, astrazione delle loro proprietà: i gruppi.

Gruppi di simmetrie, gruppi di simmetria del quadrato e del triangolo equilatero.

Isometrie: traslazioni , riflessioni e glissoriflessioni; disegni invarianti per una trasformazione. Dominio fondamentale di un gruppo di simmetrie.

I 7 gruppi di simmetria di una striscia (motivi “a festone”, o “fregi”). Gruppi cristallografici nel piano.

### 3. Altre rappresentazioni del piano cartesiano

Coordinate polari: sistema di coordinate polari; grafici di equazioni in coordinate polari (cardioide, spirali, lemniscata e rosette), area di regioni limitate da curve polari. Cambiamenti di coordinate.

Costruzione geometrica dei numeri complessi  $\mathbb{C}$ , come piano di numeri dotato di somma e prodotto. Rappresentazione in coordinate polari e cartesiane, formule di De Moivre.

### 4. Analisi in più dimensioni

4a. prerequisiti. Geometria nello spazio: sistemi di coordinate nello spazio, tracciare superfici, rette, piani; superfici quadriche e loro rappresentazione grafica. Vettori: vettori nel piano, vettori nello spazio, prodotto vettoriale. Piani e rette nello spazio, ortogonalità e parallelismo.

4b. Curve parametriche: funzioni vettoriali, equazioni parametriche; inclinazione, concavità, lunghezza d' arco e cambiamenti di parametro. Versori tangente e normale, curvatura. Curve nello spazio.

4c. Calcolo differenziale di funzioni di più variabili: funzioni di più variabili, limiti e continuità, derivate parziali, approssimazione lineare e differenziabilità; derivazione a catena, derivate direzionali e vettore gradiente; rette normali e piani tangenti ad una superficie. Massimi e minimi in una regione.

4d. Integrali multipli: regioni nel piano e nello spazio; integrali doppi in coordinate cartesiane, integrali doppi in coordinate polari. Integrali tripli. Trasformazioni di coordinate, cambiamenti di variabili in integrali multipli.

4e. Calcolo differenziale su vettori: integrali di linea, teorema di Green per domini semplicemente connessi.

## BIBLIOGRAFIA

I contenuti ai punti 3 e 4 del programma possono essere studiati su qualunque testo (di livello universitario). In particolare, si trovano su: Thomas-Finney *Analisi Matematica*, Zanichelli.

E.A. Abbott *Flatland: a Romance of Many Dimensions*, Princeton University Science Library 1991 (Dover 1953); trad. italiana: *Flatlandia*, Adelphi 1996

T. Banchoff *Oltre la terza dimensione* Zanichelli 1993

Courant, Robbins *Che cos' è la matematica?* Boringhieri

L.A. Lyusternik *The Shortest Lines* Little Mathematics Library MIR Publishers Moscow 1983

A. Kostovskii *Geometrical Constructions with compasses only* Little Maths Library MIR Publishers Moscow, 1982

R. Osserman *Poesia dell' universo: l' esplorazione matematica del cosmo* Longanesi 1995

B. Riemann *Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria* Boringhieri 1994