QUALCHE EQUAZIONE PER IL SUONO, (DEDICATA AI MIEI STUDENTI, ALLIEVE ARCHITETTE)

LAURA TEDESCHINI LALLI

1. ...Il suono è un fattore di orientamento nello spazio

Il conte, dimenticando di cancellare il sorriso dal volto, guardava lontano davanti a sé lungo la fascia selvosa e, senza fiutare, teneva in mano la tabacchiera. Subito dopo il latrato dei cani si udì il segnale della presenza del lupo, dato in chiave di basso dal corno di Danilo; lo stormo dei cani si unì ai primi tre e si udirono urlare a distesa le voci dei segugi, con quello speciale ululio che serviva di segnale per l' inseguimento del lupo. I bracchieri non incitavano più i cani ma gridavano "hallalì", e fra tutte le voci spiccava quella di Danilo, ora bassa, ora acuta e penetrante. La voce di Danilo pareva che colmasse tutto il bosco, ne uscisse e risonasse lontano nei campi. Dopo aver teso l'orecchio per alcuni secondi in silenzio, il conte e il suo palafreniere si convinsero che i segugi si erano divisi in due stormi: uno, grande, che urlava con foga particolare, aveva preso ad allontanarsi, l'altra parte dello stormo era corsa lungo il bosco, e con questo stormo si poteva udire il grido di "hallalí" di Danilo. Questi due inseguimenti si fondevano, si mescolavano, ma si allontanavano entrambi. Semión sospirò e si chinò per accomodare il guinzaglio in cui si era impigliato un cane giovane; anche il conte sospirò e, scorta nella propria mano la tabacchiera, l'aprí e tirò su una presa.[1]

In questo brano di *Guerra e Pace* ci sono alcuni ingredienti che non sfuggiranno alle allieve architette: un grande spazio, suoni che percorrono quello spazio, due percettori (il conte Rostov ed il suo palafreniere Semión) che *localizzano*, uditivamente quei suoni nello spazio, cioè ne individuano la posizione ad orecchio. Tutto questo avviene in un tempo molto piccolo: il tempo in cui il conte rimane sorridente con la tabacchiera in mano prima di tirare una presa. Questo vuol dire che tutta l'informazione spaziale è codificata, nel segnale sonoro, in una scala di tempo molto piccola, e che il nostro apparato percettivo è in grado di decodificarla ed assegnarla alla scala di spazio giusta.

Nell'ultimo paragrafo metteremo in luce quali scale di tempo siano implicate da questa attività cognitiva, e come stiano essendo studiate dai fisici percettivisti. La cosa è tuttora campo aperto di ricerca, quindi questa premessa è per mettere in luce che siamo in mezzo al guado, e per degli allievi architetti è essenziale sapere che ciò che conosciamo va opportunamente calibrato da gruppi di controllo formati da percettori, a monte e a valle di

Date: **30 Gennaio 2013.**

[1]L. N. Tolstoi *Guerra e Pace* trad. it. A. Polledro, ed. Newton Compton 2008

ciascun progetto; i vostri esperimenti su campo che hanno accompagnato il corso teorico sono davvero parte integrante di questa profonda, necessaria, comprensione.

2. Introduzione: un trattamento matematico

Quelle che seguono sono delle note sulle equazioni differenziali, mirate ad arrivare rapidamente a studiare le soluzioni dell' equazione della corda vibrante. Le ragioni di questa scelta sono varie:

-pensiamo sia maturo il tempo perché le allieve architette comincino a parlare di suono nello spazio, ed averne alcuni strumenti, ad esempio parole per parlarne.

-il modello matematico chiamato *"corda vibrante"* consiste in un'equazione alle derivate parziali, ma la sua soluzione (per separazione di variabili) si riduce all'integrazione di una derivata seconda (peraltro costante) di due funzioni reali di variabile reale, una nel tempo e l'altra nello spazio. Questo lo sapete certamente fare, ve lo dimostriamo subito.

-la soluzione della corda vibrante è il prodotto di due funzioni: una funzione periodica nel tempo ed una funzione periodica nello spazio. Lo studio dell'interazione di queste due periodicità appassiona sempre tutti. Lo stesso tipo di studio e di interazione di periodicità, può poi essere illustrato in alcuni casi di spazi bidimensionali, che i nostri studenti non saprebbero risolvere autonomamente.

-La soluzione della corda vibrante si fa per tentativi, sottolineando il fatto che la matematica non è completamente deduttiva, e a volte si parte con un tentativo e si procede poi rigorosamente. Questo abitua al procedimento scientifico ovvio, ma spesso dimenticato, di tener bene presenti le varie ipotesi modellistiche fatte per arrivare alla soluzione, in modo da tornare indietro e sapere a quale di esse addebitarne le conseguenze :) ...ed eventualmente correggere il tiro per accomodare fenomeni altrimenti inspiegabili, ma che accadono.

3. Ringraziamenti, attribuzioni, convenzioni

Volendo parlare di suono in un corso di matematica a degli studenti che non avevano mai fatto equazioni differenziali abbiamo cominciato con il rinverdire la lettura del cap.7, §7 di [Courant& Robbins (1943)]. Paola Magrone ha scritto la parte di equazioni ordinarie ed i relativi esercizi.

Nel trattamento delle equazioni alle derivate parziali ho seguito [Calus& Fairley (1970)], uno dei primi testi di *istruzione programmata*, prima della rete.

Nel nostro corpo studentesco ci sono circa lo stesso numero di maschi e femmine; quindi procedo alternando regolarmente il maschile ed il femminile nel rivolgermi a chi legge: studenti e studentesse, allieve ed allievi, lettore e lettrice ecc. ecc.

Abbiamo messo in rete; questo vuol dire che pensiamo che sia abbastanza corretto da poterci studiare sopra. Abbiamo inserito una data in prima pagina: questo vuol dire che questi appunti saranno aggiornati, senza peraltro stravolgerli. Saremo molto grate di qualunque suggerimento, segnalazione di errore, di passi oscuri, o semplicemente di possibilità di miglioramento.

Finché non sarà pronto l'ultimo paragrafo, consultate i riferimenti che trovate nella bibliografia del corso, in rete, dove ho specificato libro per libro quali capitoli interessano la percezione del suono nello spazio, o la progettazione di spazi tenendo conto del suono.

4. Equazioni differenziali ordinarie

Un'equazione differenziale è un'equazione che mette in relazione una funzione con le proprie funzioni derivate. Risolvere l'equazione vuol dire trovare una funzione che, assieme alle proprie derivate, soddisfi sempre (cioè in ogni punto in cui sono tutte definite), quell'equazione. Se la funzione protagonista dipende da una sola variabile, l'equazione viene detta *equazione differenziale ordinaria*, mentre se dipende da due o più variabili si chiamerà *equazione differenziale alle derivate parziali*. In questo paragrafo ci occuperemo di quelle ordinarie.

Le equazioni differenziali sono lo strumento matematico che permette di studiare l'evoluzione di un dato fenomeno, infatti contengono le relazioni di una funzione con le sue variazioni, ovvero le sue derivate.

Il motivo per cui le funzioni esponenziale e trigonometriche vengono così tanto studiate è proprio perché esse risolvono alcune equazioni differenziali molto semplici, cioè perché sono in relazione semplice con la propria variazione. Facciamo subito un esempio: sia $y(x)$ una funzione di una variabile e di seguito indicheremo con $\frac{dy}{dx}$ la derivata prima di y.

$$\frac{dy}{dx} = y$$

ci chiediamo quale funzione $y(x)$ è tale che quando viene derivata dà come risultato la funzione stessa. La funzione $y(x) = e^x$ ha certamente questa proprietà (provate..!). Volendo considerare un esempio leggermente più generale,

$$\frac{dy}{dx} = cy \qquad (*)$$

con c costante, ha come soluzione $y(x) = e^{cx}$. Osservazione: l'esponenziale risolve un'equazione differenziale semplice da formulare. Supponiamo di volere osservare e studiare un fenomeno in cui una certa quantità (la densità di una sostanza, il moto di un oggetto....) y vari con il tempo t, e che essa vari istante per istante t proporzionalmente al valore di $y(t)$. L'equazione che si ottiene è esattamente la $(*)$.

Se passiamo alle parole, dalle formule, con $(*)$ stiamo dicendo che la funzione $y(x)$ cercata *cresce in ragione della propria quantità*: più y è presente, più essa stessa cresce rapidamente. Poiché la soluzione è una funzione esponenziale questa "crescere sempre in ragione della propria quantità" è anche la definizione di *crescita esponenziale* ...e tutti gli altri usi, del tipo "crescere un sacco" sono impropri.

Esempio Una cellula si divide sdoppiandosi, poi entrambe si sdoppiano di nuovo. Immaginiamo che ci metta un tempo infinitesimo a dividersi, da quando nasce. Chiamiamo $n(t)$ il numero di cellule al tempo t. Allora avremo $n'(t) = 2n(t)$.

Esercizio-problema dalle parole alle formule: Pensare o immaginare altre quantità che crescono in ragione della propria quantità, ed elencarle.

In realtà l'equazione differenziale più semplice a cui possiamo pensare, e che abbiamo già incontrato e risolto, è:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

dove $f(x)$ è una funzione nota. Non è altro che il problema della ricerca delle primitive di una funzione, e per il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale

$$y(x) = \int f(x)dx = F(x) + C, \qquad F'(x) = f(x)$$

Questa equazione differenziale ammette quindi infinite possibili soluzioni, perché sono infinite le possibili costanti additive. Normalmente un'equazione differenziale è accompagnata da una o più *condizioni iniziali.* Ovvero: tra tutte le soluzioni possibili, voglio quella che all'istante zero si trovi in una data posizione, oppure se si tratta del moto di un oggetto, l'oggetto "parta" con una data velocità iniziale. Infatti un'equazione differenziale non è completa se non sono presenti sufficienti condizioni iniziali.

Esempio : risolvere l'equazione differenziale

$$\frac{dy}{dx} = sinx$$

con condizione iniziale $y(0) = \frac{1}{2}$.

La soluzione dell'equazione è la funzione $y = -cosx + C$. Dobbiamo determinare la costante C in modo che per $t = 0$ la soluzione valga $\frac{1}{2}$.

Quindi $\frac{1}{2} = y(0) = -1 + C$ da cui si ricava che $C = \frac{3}{2}$.

Qualche esercizio

1) Verificare se $y = sin3x$ e $cos3x$ sono entrambe soluzioni di $\frac{d^2y}{dx^2} = -9y$;

2) Verificare se $y = e^{-\frac{x}{2}} \cos \sqrt{\frac{3}{2}}x$ è soluzione di $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + 2y = 0$

3) Data l'equazione differenziale con condizioni iniziali (che si chiama *problema di Cauchy*)

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} = 3\frac{dy}{dx} \\ y(0) = 5 \\ \frac{dy}{dx}(0) = 7 \end{cases}$$

verificare se la funzione $y = 5 + \frac{7}{3}(e^{3x} - 1)$ è una soluzione.

4) Dato il problema di Cauchy (generalizzazione del numero 3)

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} = 2\frac{dy}{dx} \\ y(0) = y_0 \\ \frac{dy}{dx}(0) = y_0' \end{cases}$$

verificare se la funzione $y = y_0 + \frac{y_0'}{2}(e^{2x} - 1)$ é una soluzione.

5) Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \lambda y \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

verificare se la funzione $y = Ce^{\lambda x}$ è una soluzione dell'equazione. In caso positivo determinare C affinché venga verificata la condizione al bordo.

Soluzioni Gli esercizi 1 e 2 si risolvono facendo le derivate e sostituendo nelle equazioni, con gli opportuni coefficienti se ce ne sono.

Soluzione dell'esercizio numero 3.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{7}{3} \cdot 3e^{3x}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 7 \cdot 3e^{3x}$$

pertanto è verificato che $\frac{d^2y}{dx^2} = 21e^{3x} = 3 \cdot \frac{dy}{dx}$. Si devono controllare le condizioni iniziali:

$$y(0) = 5 + \frac{7}{3}(1-1) = 5, \quad \frac{dy}{dx}(0) = \frac{7}{3} \cdot 3 = 7.$$

Soluzione dell'esercizio 5. Derivando si ha:

$$\frac{dy}{dx} = C\lambda e^{\lambda x} = \lambda y$$

ovvero la funzione data è soluzione. Affinché $y(1) = 3$, troviamo quanto vale la soluzione per $x = 1$ e imponiamo che debba venire 3 :

$$y(1) = 1 \cdot Ce^{\lambda} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad C = \frac{3}{e^{\lambda}}.$$

Pertanto la soluzione del problema di Cauchy è $y = \frac{3}{e^{\lambda}}e^{\lambda x}$

4.1. **Il metodo della separazione delle variabili.** Si dice a *variabili separabili* un'equazione differenziale, in questo caso del primo ordine, del tipo

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

con f e g funzioni continue. Ad esempio sono a variabili separabili le seguenti due equazioni:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y},\ \text{dove } f(x) = x,\ g(y) = \frac{1}{y};$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2,\ \text{dove } f(x) = 1,\ g(y) = 1 + y^2.$$

Per trovare le soluzioni di questo tipo di equazioni si devono separare le variabili nel vero senso della parola:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \quad \Leftrightarrow \frac{1}{g(y)}dy = f(x)dx$$

e si integra membro a membro

$$\int \frac{1}{g(y)}dy = \int f(x)dx.$$

Se chiamiamo $G(y)$ la primitiva di $g(y)$ e $F(x)$ la primitiva di $f(x)$ si ottiene una relazione del tipo

$$G(y) = F(x) + C.$$

Ovvero: si ottiene una relazione implicita tra x e y. Quello che tutti vorremmo è ottenere alla fine la variabile y espressa come funzione della x. Questo non è sempre possibile, come vedremo nei prossimi esempi.

Esempio 1

Risolvere l'equazione differenziale $\frac{dy}{dx} = 1 + y^2$.

Separando le variabili e integrando membro e membro si ottiene:

$$\frac{dy}{1+y^2} = 1 \cdot\ dx \quad \leftrightarrow \frac{dy}{1+y^2} = \int dx,$$

da cui $\arctan y = x + C$, ovvero la forma implicita. Invertendo la funzione arcotangente si ottiene quella esplicita: $y = \tan(x + C)$. Verifichiamo che la soluzione sia corretta :

$$\frac{dy}{dx} = (\tan(x + C))' = \frac{1}{cos^2(x + C)}.$$

$$1 + y^2 = 1 + \tan^2(x + C) = 1 + \frac{sin^2(x + C)}{cos^2(x + C)} = \frac{1}{cos^2(x + C)}.$$

Esempio 2

Risolvere l'equazione differenziale $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$.

Separando le variabili e integrando membro e membro si ottiene:

$$y\,dy = x\;dx \quad \leftrightarrow \int y\,dy = \int x\;dx$$

da cui

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C \quad \to y^2 = x^2 + 2C.$$

Come osservato in precedenza, le soluzioni sono in forma implicita, cioé mentre desidereremmo come soluzione dell'equazione differenziale una funzione $y(x)$, abbiamo una relazione tra y, x. L'equazione $y^2 - x^2 = 2C$ rappresenta per $C \not\equiv 0$ una famiglia di iperboli equilatere nel piano xy. Infatti, per ogni valore reale della costante C, si ottiene un'iperbole (provate a disegnare le iperboli che si ottengono per C=1,2,3). Se $C = 0$ si ottengono due rette passanti per l'origine (le bisettrici). In ogni caso queste funzioni sono soluzioni dell'equazione differenziale, e pur non avendone ottenuto la forma esplicita abbiamo capito e disegnato il grafico. Cioè ogni soluzione dell'equazione differenziale fa parte di questo grafico, ne è un ramo.

5. Equazioni alle derivate parziali

Se la funzione che si mette in relazione con le proprie derivate è una funzione di più variabili, evidentemente le derivate in questione sono derivate parziali, e quindi l'equazione prende il nome di *equazione alle derivate parziali.*

Esempio 3:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 6\frac{\partial y}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Come tutte le equazioni differenziali, questa equazione ha un numero illimitato di soluzioni. Verificare che la funzione $y = Ae^{-3t} sin\frac{3x}{2}$ ne è soluzione.

5.1. **Due modelli fisico-matematici per le vibrazioni.** Ora passiamo ad esemplificare con alcune equazioni differenziali che costituiscono modelli fisico-matematici, e quindi sono particolarmente usate nelle applicazioni. Entrambi sono equazioni differenziali del secondo ordine, ed entrambi hanno soluzioni oscillatorie, e per questo sono spesso l'inizio di qualunque altro modello di studio di oscillazioni.

Modello 1: l' oscillatore armonico, e sua soluzione

Il primo modello matematico di vibrazione si costruisce pensando ad una molla, cioè è un'idealizzazione di come pensiamo tutte le molle. Se deformiamo una molla dalla sua posizione di equilibrio, ci aspettiamo che la molla tenti di riprendere la posizione di equilibrio, spingendo in fuori ciò che è stato compresso e richiamando ciò che è stato allontanato.

Dunque la forza di richiamo f della molla ha segno opposto allo spostamento:

$$f = -kx$$

dove k è la costante di richiamo che descrive quanto è forte la molla. Ricordando che se $x(t)$ è lo spostamento della pallina al tempo t, abbiamo che la sua velocità in ogni istante

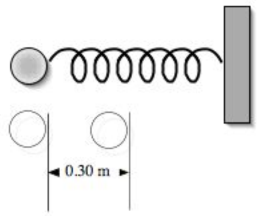

FIGURE 1. Oscillazioni: Una pallina poggia su una superficie priva di attrito, ed è attaccata ad una molla; se viene spinta contro la molla, la molla lo respinge. In figura lo spostamento x è di 30 cm.

è data da $v(t) = \frac{dx}{dt}$ e la sua accelerazione da $a(t) = \frac{d^2x}{dt^2}$. Ora ci serviamo della legge di Newton

$$f = ma$$

per scrivere il modello fisico-matematico, cioè un'equazione (matematica) che mette in relazione grandezze fisiche. Mettendo insieme queste informazioni, senza conoscere il moto, cioè l'espressione esplicita della funzione $x(t)$, sappiamo però che deve verificare:

$$f = -kx = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

cioè:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{k}{m}x(t).$$

Questa è un'equazione differenziale (ordinaria) di secondo ordine, e sapete risolverla, perché vuol dire "integrare due volte". Sappiamo che le funzioni che sono proporzionali alle proprie derivate seconde cambiate di segno sono le funzioni trigonometriche elementari, seno e coseno. Quindi proviamo come soluzione $x(t) = sin(At)$ con A costante arbitrarie per il momento. Verifichiamo che questa sia una soluzione, poi mettiamo a posto A.

$$\frac{dx}{dt} = Acos(At)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A^2sin(At)$$

e dev'essere, per essere fedeli al nostro modello:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A^2sin(At) = -\frac{k}{m}x(t)$$

da cui si capisce che occorre (e basta) porre $A^2 = \frac{k}{m}$.

La soluzione dell'oscillatore armonico di una molla di coefficiente di richiamo k cui sia legata una massa m è dunque $x(t) = x(t) = sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t)$.

Modello 2: la corda vibrante (la sua soluzione, dopo)

Il modello fisico-matematico della corda vibrante parte dall'idea di una corda tesa e fissata agli estremi. A riposo la corda rimane tesa sul segmento che congiunge gli estremi. Se viene deviata dalla sua posizione di riposo, tenderà a tornare verso di essa, superandola e poi tornando indietro, analogamente al caso dell'oscillatore armonico. Stavolta, però, ogni singola particella della corda è richiamata elasticamente dalle sue vicine. Diciamo che la particella a distanza x dall'estremo di sinistra della corda viene spostata verso l'alto di y. Noi cerchiamo la funzione $y(x,t)$, cioè il moto verticale della particella al passare del tempo ed a seconda della sua posizione rispetto agli estremi. Su ogni particella agisce una forza di richiamo esercitata dalle particelle vicine. Che gli estremi siano fissi vuol dire che particelle agli estremi della corda sono fisse: la soluzione dovrà dunque soddisfare: $y(0,t) = y(L,t) = 0, \forall t$.

L'equazione della corda vibrante se T è la tensione della corda e ρ la sua densità, è:

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

che possiamo scrivere

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

dove $c^2 = \frac{T}{\rho}$ è una costante del problema. In questa equazione, che non ricaveremo, potete però riconoscere alcuni ruoli. Ovviamente il membro di sinistra è la derivata seconda del moto per la densità, quindi è una forma di massa per accelerazione.

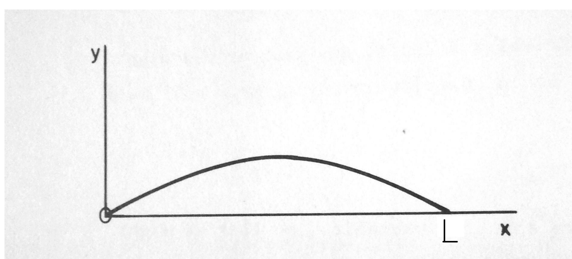

FIGURE 2. Oscillazioni: una corda, a riposo, è tesa sull'asse$-x$. Questa configurazione viene cambiata spostandone un tratto (in figura verso l'alto). Ogni punto della corda comincia ad oscillare in alto e in basso.

Abbiamo così introdotto il solo modello matematico della corda vibrante, cioè la sua equazione differenziale, che è necessariamente alle derivate parziali. Per arrivare a parlare delle sue soluzioni, abbiamo bisogno di un detour circa la capacità di integrare direttamente un'equazione differenziale, e circa il metodo della separazione delle variabili. Muniti di questo bagaglio, discuteremo poi le soluzioni della corda vibrante.

5.2. **Integrazione diretta.** Abbiamo visto che il caso più semplice di equazione differenziale ordinaria, tipo $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$ può essere risolto per integrazione diretta.

Ad esempio, se $\frac{d^2y}{dx^2} = 2$, allora $\frac{dy}{dx} = 2x + A$, ed infine $y(x) = x^2 + Ax + B$, dove A e B sono costanti (rispetto ad x), e ciascuna può assumere qualunque valore.

Allo stesso modo, alcune equazioni differenziali alle derivate parziali possono essere risolte per integrazione diretta, ad esempio se

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 2$$

dove y è funzione delle due variabili x, t, allora $\frac{\partial y}{\partial x} = 2x + f(t)$, perché $2x + f(t)$ è la più generale funzione che quando viene derivata rispetto ad x dà 2.

Allo stesso modo $y = x^2 + xf(t) + g(t)$ e questa è la soluzione più generale, dove $f(t)$ e $g(t)$ sono funzioni arbitrarie che dipendono solo dalla variabile t, e che possono contenere costanti, od essere constanti, naturalmente. Fondamentale è che entrambe sono costanti rispetto ad x.

Esempio: Trovare la soluzione generale dell'equazione

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} = 2.$$

Integriamo una prima volta, rispetto ad x:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = 2x + f(t)$$

e poi rispetto a t:

$$y = 2xt + \int f(t)dt + g(x) = 2xt + F(t) + g(x)$$

essendo $f(t)$ una funzione arbitraria di t, lo è anche $\int f(t)dt = F(t)$. Ora abbiamo bisogno di informazioni, o condizioni, supplementari per determinare la forma delle funzioni arbitrarie e le loro costanti.

Supponiamo che la condizione sia che $y = 0$ quando $x = 0$, per ogni t:

$$y(0, t) = 0$$

e che $y = x^2$ quando $t = 0$, per ogni x:

$$y(x, 0) = x^2$$

e cerchiamo la soluzione generale dell'equazione differenziale, cioè espressioni appropriate di $F(t)$ e $g(x)$ che rispettino queste particolari condizioni imposte. Dalle condizioni segue:

$y(0, t) = 0 \implies 0 = F(t) + g(0), \forall t$;

e, d'altra parte: $y(x, 0) = x^2 \implies x^2 = F(0) + g(x), \forall x$.

Detto $A = g(0)$, segue che $F(t) \equiv -A$, $\forall t$ e questa inserita nella soluzione generale trovata sopra dà luogo a:

$$y = 2xt - A + x^2 + A = 2xt + x^2$$

La lettrice noterà come, in questo caso, sebbene vi siano molte possibilità per $F(t)$ e $g(x)$, ce ne è comunque una sola per $y(x, t)$.

5.3. **Separazione delle variabili in equazioni alle derivate parziali.** A volte si procede per tentativi. Cioè si prova una soluzione, lasciando libere delle costanti che vengono poi messe a punto per far tornare i conti sia dell'equazione differenziale che delle sue condizioni al bordo. Quando l'equazione differenziale è lineare, come abbiamo visto, speriamo di aver convinto il lettore che ha senso cominciare a provare con un'esponenziale $y = Ae^{mx+nt}$, che può anche essere scritta come $y = Ae^{mx}e^{nt}$. Quest'ultima forma è del tipo $y = X(x)T(t)$, prodotto di una funzione della sola x per una funzione della sola t. Spesso è più semplice partire da questa forma, come tentativo, piuttosto che dalla funzione esponenziale (che è più specifica). In particolare quando l'equazione si presta a soluzioni di questo tipo si posso, anche in questo caso, *separare le variabili.*

Esempio: cercare la soluzione dell'equazione

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, (**)$$

con le condizioni "al bordo" che $\forall t$ $y = \sin t$ per $x = 0$, e che $y \to 0$ quando $x \to \infty$, che si possono anche scrivere più estesamente $\forall t$: $y(0, t) = \sin t$ e $y(x, t) \to 0$ per $x \to \infty$.

Sia $y = X(x)T(t)$ una soluzione-tentativo, che per brevità scriveremo come $y = XT$, sottintendendo che X è funzione della sola variabile x e T è funzione della sola t. derivando la soluzione-tentativo abbiamo rispettivamente:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = T\frac{dX}{dx}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = T\frac{d^2X}{dx^2}$$

e l'analoga

$$\frac{\partial y}{\partial t} = X\frac{dT}{dt}, \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = X\frac{d^2T}{dt^2}.$$

Perché $y = XT$ sia soluzione di (**) dev'essere:

$$T\frac{d^2X}{dx^2} + X\frac{d^2T}{dt^2} = 0$$

e questa può essere scritta come

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2} \quad (***)$$

in cui, come noterete, sono state separate le variabili: il membro di destra dell'equaxione dipende solo da x ed il membro di sinistra solo da t.

Esercizio: cosa diventerebbe il membro di sinistra in ciascuno dei casi seguenti:

(i) $X(x) = 4e^{2x}$
(ii) $X(x) = x^2$
(iii) $X(x) = xe^{-x}$
(iv) $X(x) = Acos3x + Bsin3x$

Ricordiamo che dobbiamo trovare $X(x)$ e $T(t)$ che soddisfino la $(***)$, ovvero funzioni che dipendono ciascuna SOLO da una delle due variabili coinvolte nell'equazione. Mentre sarebbe possibile trovare T in modo che $-\frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2} = 4$ o -9, è impossibile che $-\frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2}$ diventi uguale a $\frac{2}{x^2}$ o a $\frac{x-2}{x}$, poiché T contiene unicamente la variabile t. Di conseguenza l'equazione

(∗∗∗) può essere verificata solo se la quantità $\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}$ è una costante (e quindi analogamente dicasi per $-\frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2}$).

Pertanto scriveremo $\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2} = \lambda$, ovvero

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = \lambda \text{ e } -\frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2} = \lambda$$

$$\frac{d^2X}{dx^2} - \lambda X = 0 \text{ e } \frac{d^2T}{dt^2} + \lambda T = 0$$

Il problema di risolvere l'equazione di partenza (∗∗) ora è stato ridotto a quello di risolvere due equazioni differenziali ordinarie.

Esercizio:

Provate a scrivere la soluzione generale di queste due equazioni nel caso in cui $\lambda = k^2$ e $\lambda = -k^2$, con k numero reale. Suggerimento: andate a rivedere l'esercizio 1 pag.4

Soluzione:

$$\text{se } \lambda = k^2, \quad X(x) = A_1e^{kx} + B_1e^{-kx},\ T(t) = A_2coskt + B_2sinkt;$$

$$\text{se } \lambda = -k^2, \quad X(x) = A_1coskx + B_1sinkx,\ T(t) = A_2e^{kt} + B_2e^{-kt}.$$

Affinché $y(x,t)$ sia uguale a $sint$ quanto $x = 0$, dovrà essere scelto il primo insieme di soluzioni trovate nell'esercizio appena svolto. Pertanto

$$y(x,t) = (A_1e^{kx} + B_1e^{-kx})(A_2coskt + B_2sinkt).$$

La condizione che $y \to 0$ quando $x \to \infty$ ci fornisce qualche informazione sulle varie costanti da determinare?

Risposta: sì, dovrà essere $A_1 = 0$, altrimenti l'esponenziale con esponente positivo farebbe tendere y a infinito quanto $x \to \infty$.

A questo punto ci rimane

$$y(x,t) = B_1e^{-kx}(A_2coskt + B_2sinkt)$$

Sappiamo che $y(0,t) = sint$. Sostituendo $x = 0$ nell'espressione di $y(x,t)$ si ha

$$y(0,t) = B_1(A_2coskt + B_2sinkt) = sint,$$

che implica che $B_1A_2 = 0$, $k = 1$, $B_1B_2 = 1$. Quindi la soluzione sarà $y(x,t) = e^{-x}sint$

5.4. **Soluzione dell'equazione della corda vibrante.** Riprendiamo in considerazione adesso l'equazione della corda vibrante

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Supponiamo che si debba trovare y in funzione di x e t, e il movimento cominci all'istante $t = 0$ disponendo una corda tesa di lunghezza L secondo la forma che assume la funzione $y = Asin\frac{\pi x}{L}$ e poi rilasciandola (questa configurazione è proprio come quella della figura 2). Proviamo a supporre che la soluzione sia della forma $y = X(x)T(t) = XT$ e vediamo che succede se inseriamo questa funzione nell'equazione, usando la regola della derivazione delle funzioni composte :

$$X\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = C^2 T\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}.$$

Dividendo entrambi i membri per la quantità XT otteniamo la separazione delle variabili:

$$\frac{1}{T}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \frac{C^2}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}.$$

Per le ragioni già esposte in precedenza, questa equazione può essere soddisfatta unicamente se entrambi i membri sono uguali alla stessa costante, ovvero

$$\frac{1}{T}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \frac{C^2}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \lambda.$$

Che segno deve avere la costante λ?

La risposta a questa domanda ci è fornita dalle condizioni iniziali: la soluzione di $\frac{C^2}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \lambda$ deve essere una funzione trigonometrica perché per $t = 0$ tale soluzione dovrà essere esattamente $y = Asin\frac{\pi x}{L}$. Derivando due volte rispetto ad x una funzione trigonometrica si ottiene un segno meno. Quindi λ sarà una costante negativa.

Quindi "battezziamo" $\lambda = -k^2$ con k reale (ricordate che il quadrato di un numero reale è sempre positivo, quindi con un meno davanti è sempre negativo!). Le due equazioni diventano

$$\frac{1}{T}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = -k^2, \qquad \frac{C^2}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -k^2.$$

Per trovarne le soluzioni generali ricordiamo che dovranno essere funzioni trigonometriche, e che la derivata seconda di ciascuna delle funzioni X e T è uguale a una costante $-k^2$, quindi nell'argomento della funzione trigonometrica dovrà comparire la costante k. Proviamo con

$$T = A_1 \cos kt + B_1 sinkt, \qquad X = A_2 cos\frac{kx}{c} + B_2 sin\frac{kx}{c}.$$

Deriviamo due volte ciascuna funzione:

$$\frac{dT}{dt} = -kA_1 sinkt + kB_1 coskt, \qquad \frac{d^2T}{dt^2} = -k^2 A_1 coskt + -k^2 B_1 sinkt \ = \ -k^2 T;$$

$$\frac{dX}{dx} = -\frac{k}{c}A_2 sin\frac{kx}{c} + \frac{k}{c}B_2 cos\frac{kx}{c}, \qquad \frac{d^2X}{dx^2} = -\frac{k^2}{c^2}A_2 cos\frac{kx}{c} - \frac{k^2}{c^2}B_2 sin\frac{kx}{c} \ = \ -\frac{k^2}{c^2}X.$$

Quindi

$$y(t,x) = (A_1 \cos kt + B_1 sinkt) \left(A_2 cos\frac{kx}{c} + B_2 sin\frac{kx}{c} \right)$$

Dobbiamo determinare quali sono i valori delle costanti A_1, A_2, B_1, B_2. La prima condizione è che quando $x = 0$, $y = 0$ per ogni valore di t. Sostituendo nella soluzione si ha $y(t,0) = A_2 (A_1 \cos kt + B_1 sinkt) = 0$, da cui deduciamo che $A_2 = 0$.

Riscriviamo la soluzione usando questa informazione:

$$y(t,x) = (A_1 \cos kt + B_1 sinkt) \, B_2 sin\frac{kx}{c}$$

La seconda informazione che abbiamo dalle condizioni iniziali è che la corda all'istante $t = 0$ è *ferma*. Quindi parte con velocità nulla, ovvero $\frac{\partial y}{\partial t}(0,x) = 0$. Calcolando $\frac{\partial y}{\partial t}(t,x)$ (calcolate voi per esercizio questa derivata parziale) e sostituendo $t = 0$ si ha

$$\frac{\partial y}{\partial t}(0,x) = -B_1 k \cdot B_2 sin\frac{kx}{c} = 0$$

ovvero $B_2 B_1 = 0$.

Di nuovo, quello che è rimasto della soluzione è $y(t,x) = A_1 \cos kt \cdot B_2 sin\frac{kx}{c}$.

L'ultima informazione per cui dobbiamo sfruttare le condizioni iniziali è che all'istante $t = 0$ la corda ha la forma, come specificato a inizio paragrafo, della funzione $Asin\frac{\pi x}{L}$. Da cui

$$y(0,x) = A_1 \cdot B_2 sin\frac{kx}{c} = A \; sin\frac{\pi x}{L}$$

e deduciamo che: $A_1 B_2 = A$, $\frac{kx}{c} = \frac{\pi x}{L}$.

L'espressione definitiva della soluzione è:

$$y(t,x) = Asin\frac{\pi x}{L} \; cos\frac{\pi ct}{L}$$

References

[Courant& Robbins (1943)] Courant R., Robbines H. *Che cos'è la matematica?* (1941) Bollati Boringhieri (2000)

[Calus& Fairley (1970)] Calus I.M., Fairley J.A. *Fourier series and partial differential equations a programmed course for students of science and technology* Wiley - Interscience (1970)

[Adams (2007)] Adams R.A. *Calcolo differenziale 2*, Casa Editrice Ambrosiana

[Bramanti& Pagani& Salsa (2009)] Bramanti M., Pagani C.D., Salsa S. *Analisi Matematica 2*, Ed. Zanichelli