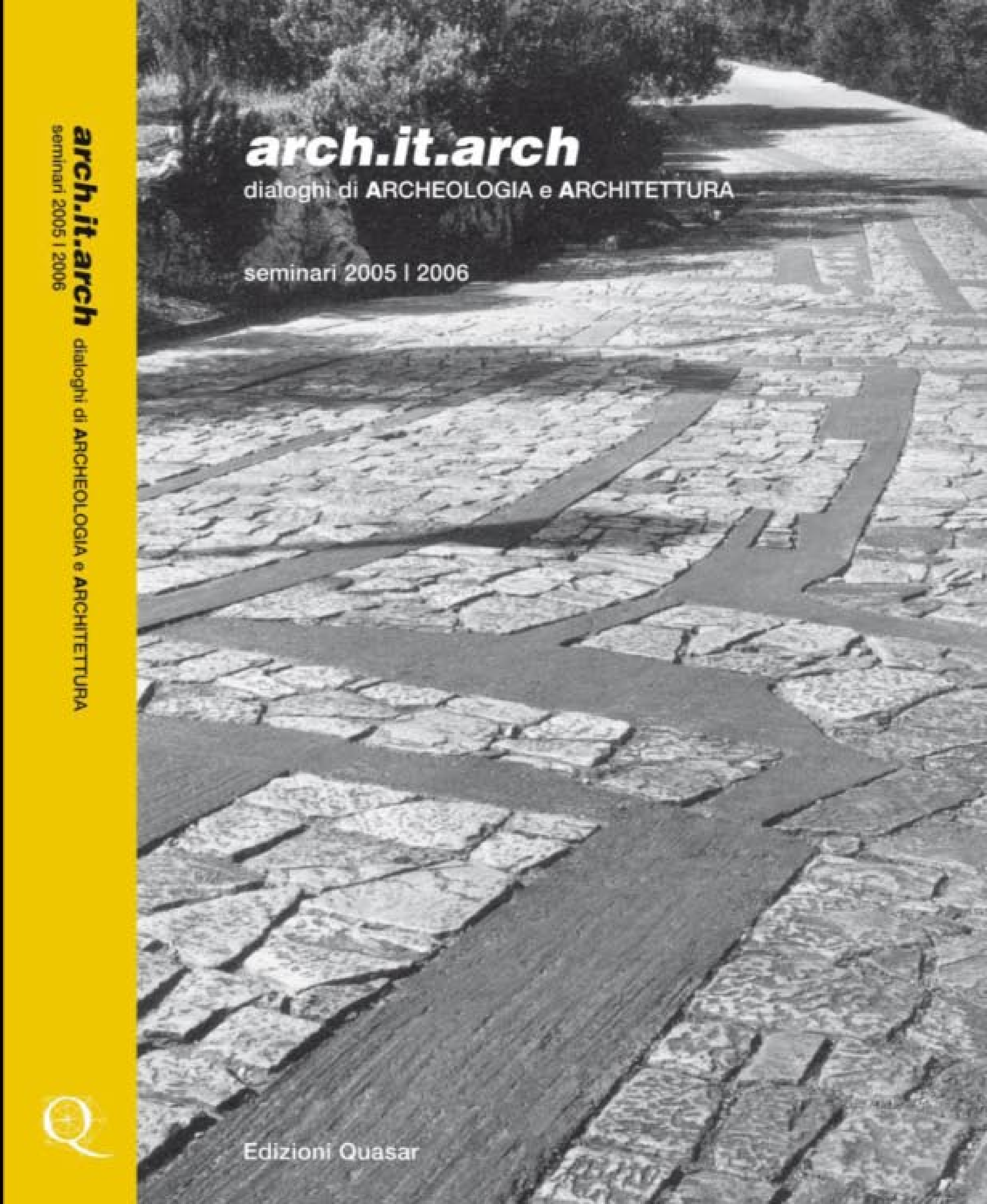
Facoltà di Architettura
Facoltà di Lettere e Filosofia
Dipartimento di Progettazione e studio dell'architettura
Dipartimento Studi storico-artistici, archeologici e sulla conservazione

arch.it.arch
dialoghi di Archeologia e Architettura
seminari 2005-2006

cura scientifica
Daniele Manacorda
Riccardo Santangeli Valenzani
Luigi Franciosini
Elisabetta Pallottino
Rita Volpe
Stefania Picciola
Alessandra Carlini
Paola Porretta

cura redazionale
Paola Porretta



Atti dei seminari:
marzo-novembre 2005
gennaio-giugno 2006

ROMA TRE
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI

Facoltà di Architettura
Facoltà di Lettere e Filosofia
Dipartimento di Progettazione e studio dell'architettura
Dipartimento di studi storico-artistici, archeologici e sulla conservazione

cura scientifica

Daniele Manacorda | Riccardo Santangeli Valenzani
Dipartimento di studi storico-artistici, archeologici e sulla conservazione |
Facoltà di Lettere e Filosofia | Università degli Studi Roma Tre

Luigi Franciosini | Elisabetta Pallottino
Dipartimento di Progettazione e studio dell'architettura |
Facoltà di Architettura | Università degli Studi Roma Tre

Rita Volpe
Sovraintendenza ai Beni Culturali del Comune di Roma

Stefania Picciola
Facoltà di Lettere e Filosofia | Università degli Studi Roma Tre

Alessandra Carlini | Paola Porretta
Facoltà di Architettura | Università degli Studi Roma Tre

cura redazionale
progetto grafico

Paola Porretta

via Ajaccio 41-43, 00198 Roma- tel 0685358444
email: qn@edizioniquasar.it

ISBN 978-88-7140-380-9

Ie Italianieuropei

Volume stampato grazie al contributo della Fondazione Italianieuropei

arch.it.arch

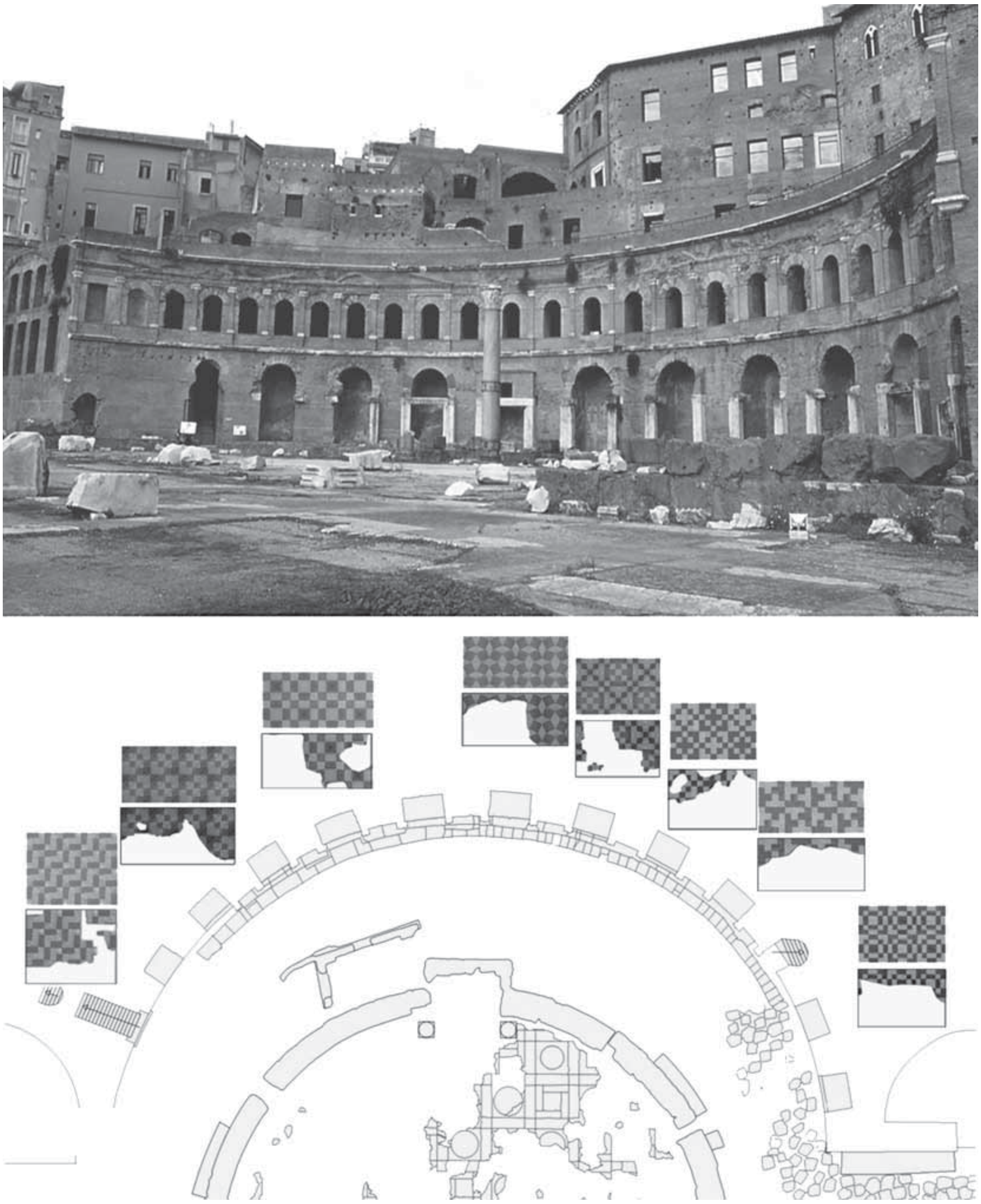
dialoghi di ARCHEOLOGIA e ARCHITETTURA

seminari 2005 | 2006

Edizioni Quasar

Comunicare l'archeologia: siti, aree, musei

1. *Emiciclo dei Mercati di Traiano, foto e planimetria; posizione dei pavimenti delle* tabernae*: stato attuale e loro ricostruzione.*



Matematica per l'archeologia: ricostruire i pavimenti dai frammenti *in loco*

Alessandra Carlini architetto | Università degli Studi Roma Tre
Elisa Conversano architetto | Università degli Studi Roma Tre
Laura Tedeschini Lalli matematico | Università degli Studi Roma Tre

"*In ambito matematico, la divisione regolare del piano è stata considerata da un punto di vista teorico [...]. Questo significa che la questione è puramente matematica? Nella mia opinione, no… [I matematici] hanno aperto un cancello che porta ad un vasto dominio, ma non sono entrati essi stessi in questo dominio. Per loro natura, essi sono più interessati al modo in cui si apre il cancello, che al giardino che giace dietro di esso*" (M. C. Escher[1]).

Esponiamo qui i primi risultati del lavoro di ricerca interdisciplinare di matematici ed architetti. Mettiamo in apertura una frase dell'artista olandese M. C. Escher che ha meditato a fondo su questi temi, perché illustra bene il piacere e la profondità del lavoro che qua descriviamo: per entrare nel giardino era necessaria una chiave che lo aprisse, ed è stata una chiave matematica, ma per addentrarvisi sono e saranno ancora necessarie altre competenze.

Introduzione

In questo articolo presentiamo la ricostruzione completa dell'aspetto originale dei pavimenti delle *tabernae* dell'emiciclo dei Mercati di Traiano a Roma [fig. 1], a partire dai frammenti *in loco*. La ricostruzione, univoca, è ottenuta grazie ad un teorema di geometria algebrica del XX secolo. Di questi pavimenti non sono note ricostruzioni integrali, probabilmente per il fatto che i frammenti rimasti sono spesso piccoli e distanti. L'approccio geometrico-algebrico struttura informazioni di tipo compositivo, e riesce a ricostruire l'informazione globale a partire da meno informazione locale di quanto normalmente richiesto da studiosi di restauro per ritenere lo studio fattibile.

Lo studio di ricostruzione di pavimenti, problema classico per archeologi ed architetti restauratori, parte evidentemente sempre dall'ipotesi che le lacune presenti possano esser riempite a partire dall'informazione tuttora presente; si ipotizza, cioè, una ridondanza o ricorrenza dei motivi, dei materiali, delle tecniche, nel pavimento stesso o in pavimenti coevi. Nel nostro caso, ci occupiamo soltanto della ripetizione geometrica, e cerchiamo la ripetizione solo nel particolare pavimento sotto indagine; a partire dallo studio oggettivo di tutte le "simmetrie" compatibili con i frammenti del manufatto allo stato attuale, ricostruiamo l'aspetto originale. Questo è possibile perché, così come tutta la geometria moderna, studiamo le simmetrie come proprietà di *invarianza*, e queste hanno modi rigorosi di composizione, che vedremo successivamente.

Un teorema moderno fornisce tutte le possibili composizioni di simmetrie, e garantisce che, a livello di regole compositive, non ve ne siano più di 17. Questo teorema fornisce dunque la certezza della possibilità di classificare, la finitezza della possibile classificazione, i criteri per stabilire l'equivalenza tra analisi condotte da studiosi diversi e, inoltre, la sua linea dimostrativa fornisce i criteri stessi per una disamina agevole.

Avvertenza bibliografica: le abbreviazioni utilizzate per i periodici di ambito scientifico sono quelle adoperate nel Mathematical Reviews.

[1] M. C. Escher, *The Regular Division of the Plane De Roos Foundation*, Utrecht 1958.

La nostra ricostruzione è univoca, il criterio di accettazione o scarto di una ricostruzione è basato sulla possibilità di raccordo di frammenti tra loro lontani ed isolati. Sotto questo criterio riscontrabile oggettivamente, otteniamo un solo motivo compatibile per ciascuna delle *tabernae*.

Dalle indagini bibliografiche, in rete o nei convegni di settore matematico o archeologico, non ci risulta che questa teoria matematica sia stata usata a fini di ricostruzione e riempimento di lacune. Sono invece noti lavori di analisi di manufatti integri, e ci poniamo appunto nel filone di studio da essi inaugurato[2]. Il filone conduce a problemi tuttora aperti in ambito scientifico, come è il caso della recente scoperta dell'uso di tassellazioni aperiodiche nel mondo islamico[3].

Il metodo qui proposto è generale, e non afferisce dunque all'ambito storico da noi messo sotto esame; in linea di principio esso è adoperabile ovunque appaiano delle regole di ripetizione, fornendo la classificazione completa della composizione di queste regole. Può naturalmente accadere che i frammenti *in loco* siano davvero troppo pochi o radi per ricostruire univocamente queste regole, o persino il motivo di base. È il caso, ad esempio, di molti dei pavimenti di Villa Adriana a Tivoli, dove le proposte di ricostruzione si basano su frammenti molto piccoli e molto isolati tra loro, e dunque poggiano necessariamente su casistiche storiche dei motivi geometrici, materiali e colori più usati.[4]

---

[2] R. Peréz-gòmez, *The Four Regular Mosaico Missing in the Alhambra,* in *Comp*. *and Math*. *with Appl*. 14, 1987, pp. 133-137. C. Ruiz, R. Peréz-Gòmez*, Visiones matemàticas de la Alhambra*. *El color,* in *Epsilon* 9, 1987, pp. 51-59.

[3] P. J. Lu, P. J. Steinhardt, *Decagonal and Quasi-Cristalline Tilings in Medieval Islamic Architecture,* in *Science*, 23 Febbraio 2007, pp. 1106-1110.

[4] Ringraziamo la Sovrintendenza ai Beni Culturali del Comune di Roma per l'ospitalità e la gentile collaborazione nel corso dei rilievi e della ricerca iconografica, ed in particolare per la consulenza archeologica Lucrezia Ungaro, Sistema Museale dei Fori Imperiali.

In questo lavoro sviluppiamo e portiamo a termine un'idea avanzata da Alessia Santoni e Amalia Salvatore (A. Salvatore, A. Santoni, *I gruppi di simmetria nel rilievo*, tesina del corso di Istituzioni di Matematiche 2, Università degli Studi Roma Tre Facoltà di Architettura, a.a. 1997-1998) allora allieve del secondo anno di Architettura. Alessia Spatafora ha portato avanti il rilievo del degrado, con una borsa di collaborazione per studenti messa a disposizione dalla Facoltà di Architettura. La Facoltà, nella persona del preside Francesco Cellini, ha sempre sostenuto questa ricerca, mettendo a disposizione i fondi per la Mostre, che hanno a loro volta reso possibile il necessario confronto tra comunità scientifiche che utilizzano linguaggi diversi. I risultati sono stati esposti una prima volta in forma ridotta con la piccola mostra *Tassellazioni in Architettura* al convegno Matematica e Cultura 2003 a Venezia: ringraziamo Michele Emmer per l'ospitalità in questa sede di confronto ormai nota a chi si occupa di immaginario scientifico e delle sue ricadute. La mostra è stata riallestita nei locali della facoltà, 19-23 maggio 2003, al Festival della Scienza di Genova 2006 all'interno della mostra *La matematica scoperta*: ringraziamo Corrado Falcolini per la sua collaborazione. Il progetto è poi entrato nella sua fase di ricerca sistematica ed i risultati sono contenuti nel video *Un'applicazione della teoria matematica delle tassellazioni piane in archeologia* sviluppato per la mostra internazionale *Immaginare Roma Antica*, a cura di M. Forte, L. Ungaro. Lo stesso video è stato proiettato al Festival della Matematica di Roma, Auditorium 2007, nella mostra *Immaginatevi*…

Inquadramento storico-architettonico

Il nome "Mercati di Traiano" è utilizzato per indicare convenzionalmente un complesso di edifici distribuiti su più livelli lungo le pendici del colle Quirinale e collocati alle spalle del Foro di Traiano. Il complesso è incluso nel sistema dei Fori Imperiali che, insieme al Foro Repubblicano, definisce il centro civico della Roma antica, edificando la valle compresa tra la collina della Velia (oggi sbancata) e i colli Palatino, Campidoglio e Quirinale. La struttura fu realizzata in età traianea (II secolo d.C.), probabilmente da Apollodoro di Damasco, lo stesso architetto autore del Foro di Traiano, e rientra nel programma di ampliamento a nord-est del centro civico della Roma Imperiale. I Mercati di Traiano furono costruiti innanzitutto a sostegno e regolarizzazione del colle retrostante. L'impianto architettonico è strutturato su terrazzamenti scartati: quello centrale, strutturato sulla via Biberatica, costituisce la cerniera distributiva del complesso.

Le *tabernae* oggetto di questa ricerca poggiano direttamente contro la roccia della collina a valle della via Biberatica, al piano basamentale del Grande Emiciclo, disposte lungo la strada basolata che separava l'esedra dei Mercati dall'esedra del Foro. Si tratta di undici ambienti affrescati, coperti a botte, con stipiti, architravi e soglie in travertino, ed infine pavimenti in mosaico. Le dimensioni delle *tabernae* sono di circa 3 metri di larghezza e 2 metri di profondità, escluse le soglie, e hanno un'altezza media di circa 5 metri.

I pavimenti sono realizzati in *opus tessellatum*[5], con mosaico in tessere lapidee di circa 1 cm di lato. Il disegno è articolato in un campo centrale e una cornice di fasce alternate che si estende fino alle pareti perimetrali. Il campo e la cornice delle varie *tabernae* hanno dimensioni e proporzioni diverse.

I motivi raffigurati sono di tipo geometrico in bianco e nero, in linea con la tradizione decorativa della Roma Imperiale. Il periodo che va dal I al VII secolo d.C. vede, infatti, l'apice della maturazione tecnica e stilistica dell'*opus tessellatum*. L'espansione urbanistica determinò un aumento nella richiesta di pavimenti, sia per uso abitativo, che per gli enormi edifici pubblici (terme, basiliche, luoghi commerciali) dove la pavimentazione di vaste superfici pose nuovi problemi tecnici e compositivi[6]. Il mosaico monocromo, a tessere bianche e nere, consentì di far fronte a queste nuove esigenze, riducendo la variazione cromatica e proponendo composizioni ornamentali estensibili a piacere, realizzabili su vasta scala in modo rapido ed economico, anche da maestranze poco specializzate. La tecnica di posa dei mosaici pavimentali romani è stata descritta con precisione da Vitruvio (*De Architectura*, VII, I, 1-4) e da Plinio il vecchio (*Naturalis Historiae*, XXXVI, 186-187) e la diffusione di questi motivi è tale da indurre gli studiosi ad ipotizzare che le maestranze disponessero di cartoni o album di schizzi[7] nei loro spostamenti.

---

5 L'*opus tessellatum* è il mosaico pavimentale romano realizzato con tessere quadrangolari bianche e nere di dimensioni variabili da 1 cm fino a 2 cm di lato. I. Fiorentini Roncuzzi, *Il mosaico. Materiali e tecniche dalle origini ad oggi*, Ravenna 1990, pag. 22-58. M. Farnet, *Glossario tecnico-storico del mosaico*, Ravenna 1993, pag. 195-200.
6 Fiorentini Roncuzzi, *op. cit.* a nota 5, pag. 22-58.
7 Fiorentini Roncuzzi, *op. cit.* a nota 5, pag. 88.

Nella pagina a fianco:
2. *I 17 gruppi di simmetria del piano, a partire da un unico motivo grafico. Lo studio evidenzia il ruolo della ripetizione isometrica.*
3. *I 4 movimenti rigidi del piano o isometrie piane.*

La matematica delle tassellazioni piane: breve introduzione discorsiva.

Il nostro metodo di analisi e poi di ricostruzione ha come riferimento la teoria matematica delle tassellazioni del piano, ossia di configurazioni piane che si ottengono per accostamento di poligoni, riempiendo una superficie senza sovrapposizioni. Lo studio delle tassellazioni è vasto e fa oggi parte dei settori di ricerca della geometria algebrica e dell'algebra astratta, cui contribuisce sia con metodi, sia con numerosi "problemi aperti" in ricerca matematica.

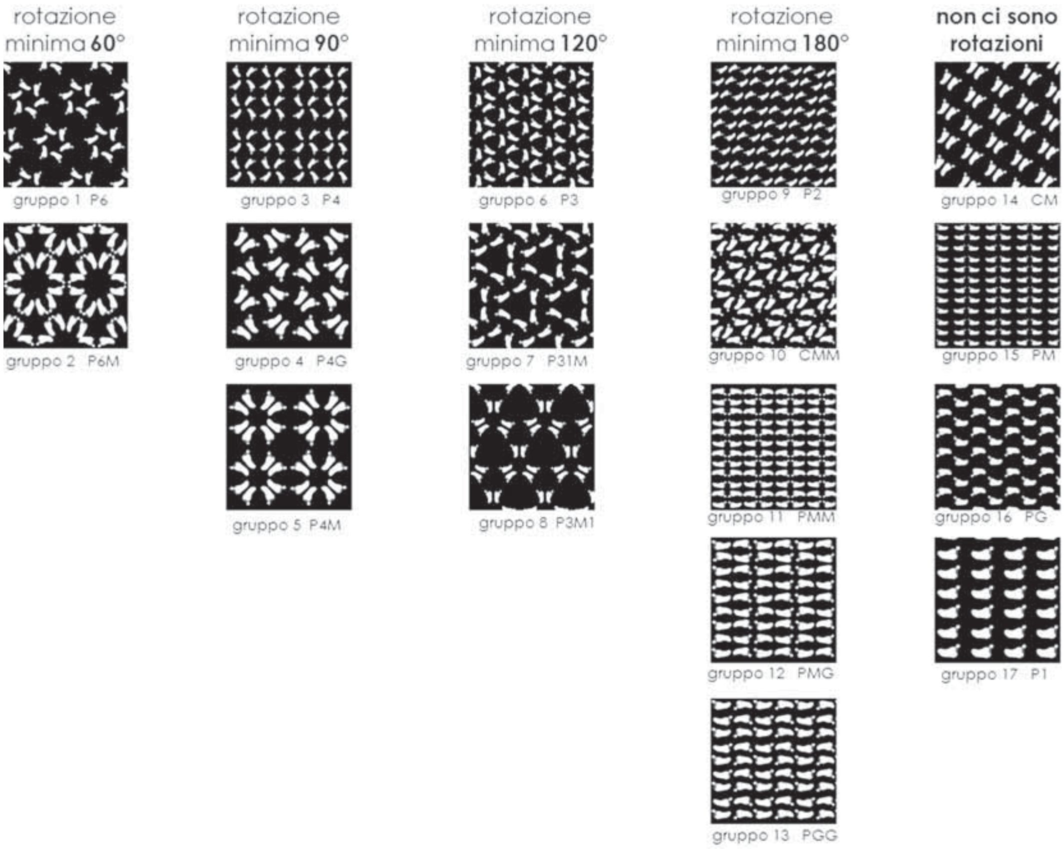
Per un riferimento visuale, si tenga presente che sono "tassellazioni del piano" i motivi decorativi pavimentali e parietali di molti edifici, caratterizzando in particolare quelli del mondo islamico. Si potrebbero citare numerosi esempi, dalla famosissima Alhambra di Granada (Andalusia, Spagna), al Palazzo reale di Rabat (Marocco), alle decorazioni e fregi del quartiere Coppedè a Roma, con caratteristiche storiche e materiali differenti, ma con un criterio compositivo comune che può essere analizzato come un'istanza di tassellazione piana.

Vediamo prima di tutto come formulare la domanda di tipo matematico.

Quanti modi ci sono di ripetere un motivo grafico nel piano in modo da ricoprirlo completamente di mattonelle uguali, "tassellandolo"? Cioè, quanti "arabeschi" si possono ideare, che si distinguano solo sul piano compositivo della legge di ripetizione? Questa domanda, nata e formulata alla fine del 1800 nel contesto delle classificazioni cristallografiche, ha ricevuto risposta completa, matematicamente parlando, nel 1924, da Polya (Coxeter riporta due diverse scoperte indipendenti di questo fatto[8]). La risposta è inizialmente sorprendente, perchè nel piano esistono solo 17 leggi di ripetizione. Per chiunque si accinga a classificare qualcosa, un teorema di questo tipo è estremamente utile, garantendo la possibilità stessa della finitezza della classificazione, e definendone i criteri. In figura 2 trovate i 17 "gruppi di simmetria del piano", elencati graficamente, a partire da uno stesso motivo di base, evidenziando così tutte le possibilità da esso ottenibili. Naturalmente, cambiando il motivo di base si possono ottenere infinite altre variazioni; ma se il motivo "tassella" il piano, la legge *compositiva* cui soggiace è certamente una di queste 17. In questo lavoro ci poniamo a questo livello di analisi compositiva, tralasciando gli aspetti grafici del motivo di base, per ragioni metodologiche.

In matematica si considera "simmetrico" un oggetto, se un movimento rigido dello spazio ne lascia invariato l'aspetto. La simmetria, dunque, è una proprietà di invarianza rispetto a delle trasformazioni. Nel caso, come è il nostro, di una figura piana, consideriamo rotazioni, traslazioni, riflessioni e glissoriflessioni, che sono i 4 movimenti rigidi elementari del piano [fig. 3]. Sul piano analitico, si cercano i movimenti isometrici del piano che mantengono inalterato il disegno completo. L'insieme di tutti i movimenti del piano che lasciano invariato un disegno ha struttura matematica di "gruppo", ed un disegno è caratterizzato dal gruppo di movimenti che lo lascia invariato (eventualmente il solo movimento nullo, nel caso di assenza di simmetrie!).

[8] E. S. Fedorov Zapiski, *Imperatorskogo S. Peterburgskogo Mineralogicheskogo Obshchestva* (2), 28, 1891. G. Polya, P. Niggli, *Zeitschrift fur Kristallographie und Mineralogie,* 60, 1924, pp. 278-298.



I 4 movimenti elementari nel piano

Traslazione

Rotazione (90°)

Glissoriflessione

Riflessione

Composizione di due movimenti

La minima regione occorrente a (ri-)generare tutto l'arabesco sotto l'azione di movimenti del piano appartenenti al suo gruppo, viene detta *dominio fondamentale*. Un dominio fondamentale è una regione connessa, non ulteriormente riducibile per simmetrie, insieme alle regole di comportamento al suo bordo. Ogni gruppo è caratterizzato dal suo dominio fondamentale nel senso che eventuali regioni diverse, entrambe candidate ad essere "la regione minima" dello stesso arabesco, sono equivalenti perché ottenibili l'una dall'altra con le regole ai bordi tipiche di quel gruppo (un lato del bordo s'incolla ad un altro? O piuttosto il motivo si ripete specchiato dall'altra parte del bordo?).

Sottolineiamo queste domande e la casistica che ne segue, perché è un fatto matematico, e questo per un matematico basta (ed occorre anche), ma anche perché è importante nel lavorare in più persone, e a fini di comunicazione ad altri studiosi, che si sappia con certezza quali modi di operare sono in realtà equivalenti. Anche a questo ci serve la matematica. Un esempio di dominio fondamentale è riportato nelle schede conclusive del nostro lavoro, per ognuno dei pavimenti in esame.

Uno degli aspetti da sottolineare è che il dominio fondamentale ha una definizione matematica che ci permette di ricostruirlo anche laddove fosse "spezzettato" esso stesso tra vari frammenti. I vantaggi dunque di riferirsi alla ricerca del dominio fondamentale sono:

– che esso è in generale molto più piccolo della zona integra cercata nelle analisi classiche degli studiosi di questi manufatti, tenendo conto di più possibilità di simmetrie, e dunque abbisognando di meno informazione esplicitamente presente nel materiale;

– che possiamo compiere la ricerca del dominio fondamentale per un numero ristretto di movimenti (i generatori del gruppo) in frammenti separati, e poi ricomporla su frammenti compatibili. Questa è una conseguenza della struttura di gruppo finitamente generato.

Per tassellazione si intende la divisione del piano, che è l'insieme delle forme chiuse che lo ricoprono completamente senza sovrapporsi e senza lasciare vuoti.

Quando il tassello di base è dato da un reticolo di rettangoli o parallelogrammi che si ripetono indefinitamente in due direzioni, la tassellazione prende il nome di "gruppo cristallografico piano"; la sua caratteristica, dal punto di vista geometrico, è l'esistenza del reticolo; dal punto di vista algebrico questo si traduce nella condizione che la parte infinita del gruppo di movimenti sia generata da sole due traslazioni lungo vettori linearmente indipendenti. La tassellazione si immagina dunque indefinitamente ripetuta a destra e a sinistra, in alto ed in basso. Ogni volta che analizziamo un pavimento, immaginiamo dunque che esso sia il ritaglio di una tassellazione, potenzialmente continuabile sul piano infinitamente esteso.

Perché *solo* 17? Questo è un ragionamento matematico, di cui qui schematizziamo i passi essenziali per la nostra argomentazione. Il numero 17 riguarda i "gruppi di simmetria bidimensionali"; un gruppo, in matematica, descrive come un insieme di elementi viene strutturato da un'operazione binaria. Qui gli elementi che consideriamo sono i movimenti rigidi del piano: come operazione binaria, dati due movimenti rigidi, consideriamo il movimento che si ottiene attuandoli uno dopo l'altro. Se una figura geometrica resta invariata sotto i singoli movimenti, evidentemente resta invariata anche sotto la loro composizione in questo senso. Per un riferimento visuale, mentre in figura 3 sono riportati i movimenti elementari, in figura 2 sono riportate tutte le loro possibili composizioni.

Abbiamo detto che consideriamo gruppi di "tassellazione", contenenti cioè due traslazioni e dunque, sul piano figurativo, figure piane in cui appare un reticolo, lungo cui possono avvenire le traslazioni senza alterare il disegno. La successiva considerazione di altri movimenti rigidi non può che limitarsi a quelli compatibili con le due traslazioni, cioè che lasciano invariato il reticolo così ottenuto, visto che debbono poter essere composti con le traslazioni. L'analisi che segue viene fatta *a priori*, in astratto. La sua stringenza teorica ci permette poi di ricostruire il reticolo attraverso gli altri movimenti compatibili, nei manufatti in cui esso non è più evidente.

Sotto altri movimenti dello stesso gruppo, un lato del reticolo deve andare in un altro lato del reticolo, e questo limita di molto le possibilità: in sostanza, o si fissano alcuni lati (come nel caso di riflessioni e glissoriflessioni attorno ad essi), oppure per rotazione, un lato viene mandato in un altro, con esso incidente [fig. 2]. Stabilito il reticolo, pochi angoli di rotazione (e certamente un numero finito) si prestano a questa invarianza. Gli angoli di rotazione compatibili con una tassellazione del piano sono solo quelli di 60°, 90°, 120° e 180°. Questa è la linea dimostrativa, che Polya ricondusse allo studio geometrico delle "azioni periodiche su un toro", dal nome della superficie, il toro (o ciambella), che è la rappresentazione tridimensionale del reticolo, i cui lati si pensino identificati.

La classificazione dei "gruppi cristallografici del piano" si fa per convenzione partendo dall'angolo minimo di rotazione possibile nel gruppo. L'ulteriore differenziazione tra i gruppi si ottiene analizzando l'eventuale presenza di riflessioni, glissoriflessioni e la loro posizione rispetto ai centri di rotazione presenti, e ai necessari assi di traslazione, ed è contenuta graficamente in figura 2.

Noi ci siamo attenute alla pura classificazione matematica, perché questa occorreva e bastava alla ricostruzione completa ed univoca dei pavimenti dei traianei. In (MW)[9], il lettore troverà nel contributo di Moran e Williams un raffinamento di questa classificazione, con criteri percettivi.

Il bellissimo video *Arabescos y geometria*[10], pluripremiato nei festival di cinema scientifico, spiega con chiarezza queste costruzioni, a partire dalle decorazioni dei palazzi dell'Alhambra. Il fatto che in Alhambra sono presenti esempi di tutti e 17 i gruppi di tassellazione è uno dei risultati più noti dell'analisi matematica visuale. La videocassetta è stata prodotta dall'Università a di-

[9] J. Flagg Moran, K. Williams, *Una classificazione delle pavimentazioni geometriche realizzate dai Cosmati*, in *Bollettino UMI*, sez. A, Aprile 2004, pp. 17-47.

[10] A. F. Costa Gonzàlez, B. Gòmez, *Arabescos y Geometría*, UNED, Madrid 1995, video VHS e libretto di accompagnamento. Versione inglese: *Arabesques & Geometry*, (Springer VideoMATH series), Berlino 1999.

stanza di Madrid (UNED), e la sua versione spagnola (molto comprensibile per lo spettatore italiano) si può ordinare tramite il sito di UNED a: http://www.uned.es/cemav/pedido.htm

Come vedremo nell'analisi specifica nei pavimenti imperiali che studiamo in questo lavoro, troviamo utilizzati solo quattro dei possibili 17 gruppi; in essi il reticolo presenta solo angoli di 90° o 180°.

Rilievi dal vero: un'attività di astrazione

M. C. Escher stesso ha iniziato lo studio delle tassellazioni a partire dai suoi schizzi dal vero delle decorazioni del palazzo dell'Alhambra, dopo la sua seconda visita del 1936[11]. Fare rilievi, "copiare", è un'attività di astrazione, nel senso che implica necessariamente lo scegliere alcuni aspetti e tralasciarne altri, e costruire un "modello". Escher portò a casa degli appunti in forma di schizzo, da stendere poi, studiandone i criteri compositivi.

Nel caso del nostro studio, il rilievo a vista del disegno geometrico dei pavimenti e del loro stato di degrado è stato condotto in fasi successive, man mano più attente ai dettagli materiali a scala più piccola.

La prima restituzione grafica dei motivi geometrici è nel primo studio di questo genere, condotto da Amalia Salvatore e Alessia Santoni nel 1999, con l'obiettivo di proporre un primo tentativo di completamento dei disegni. L'ambito in cui era stato fatto il rilievo era un corso di Restauro architettonico presso la Facoltà di Architettura di Roma Tre. Salvatore e Santoni ebbero l'idea di utilizzare le tecniche algebrico-geometriche apprese nel corso di matematica di secondo anno a fini di ricomposizione. La restituzione fu allora fatta a mano, e condotta solo sulle *tabernae* più integre, a fini di analisi e sintesi geometrica.

Da questi risultati siamo partiti per lo studio più approfondito e più completo che qui presentiamo.

Un primo rilievo a vista dello stato di degrado, viene condotto da Alessandra Carlini ed Alessia Spatafora nel 2003 in occasione della mostra a Venezia. Le lacune dei mosaici sono state rilevate alla scala dell'alternanza geometrica delle zone bianche e nere.

Questo rilievo permette lo studio delle simmetrie, la verifica per raccordi e l'individuazione delle pavimentazioni più compromesse o problematiche. Solo dopo questo studio è ragionevole passare alla disamina delle singole tessere. Alla fine l'attenzione viene posta sulle aree di mosaico isolate, e sui bordi delle lacune, per accertare le condizioni di incollaggio rispetto al disegno generale. Questa metodologia ha prodotto la documentazione dell'estensione e posizionamento delle aree di pavimento mancanti.

Abbiamo dunque compilato, per ciascuna *taberna*, una scheda analitica comprendente: la localizzazione della *taberna* rispetto all'emiciclo, una resti-

---

[11] D. Schattschneider, *Visioni della Simmetria*, Bologna 1992. Edizione originale W. H. Freeman and Company, 1990

tuzione fotografica dello stato di degrado del pavimento alle varie scale; la comparazione tra il rilievo dello stato di degrado del mosaico e il suo completamento attraverso l'applicazione del gruppo di simmetria. Queste schede vengono ora usate per una successiva analisi delle tessere non congruenti. Un riassunto delle schede si trova nelle figure 4 e 5.

L'interesse architettonico e restaurativo di questo secondo livello di rilievo sta nel verificare se il completamento del motivo, ottenuto applicando il gruppo, coincide con il posizionamento delle tessere isolate. Questo conferma la correttezza nella scelta del dominio e nella individuazione del gruppo, e offre gli strumenti e un metodo per poter posizionare correttamente anche i resti isolati di un pavimento in caso di restauro o musealizzazione e di proporne eventualmente un completamento. Il video *Un'applicazione della teoria matematica delle tassellazioni piane in archeologia*[12], contiene animazioni grafiche per ogni pavimento, che partendo dalla piccola porzione del dominio fondamentale, propone una ricostruzione dell'intero pavimento via via sotto l'azione dei movimenti del gruppo.

Come si evince dal repertorio grafico nelle figure 4 e 5, si distinguono almeno tre condizioni di degrado, all'interno delle otto *tabernae* con riguardo alla connessione tra i frammenti:

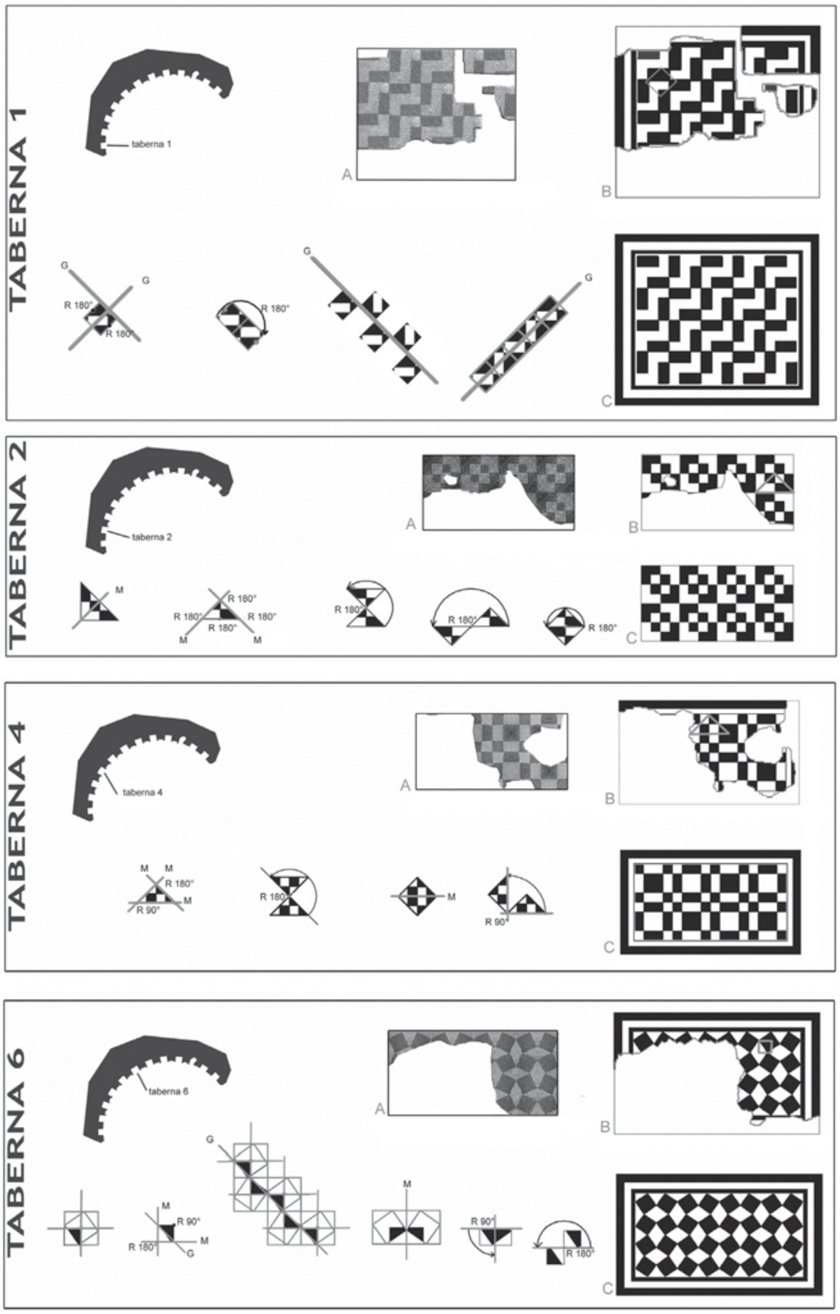
- pavimenti che presentano campi piuttosto conservati di mosaico, ma con lacune interne di diverse dimensioni (*tabernae* n. 2, 4, 8); in questo caso si tratta di riempire le lacune presenti.
- pavimenti i cui resti sono raccolti in aree di diversa grandezza, a volte molto frammentate e distanti tra loro (*tabernae* n. 1, 6, 7);
- pavimenti che presentano scarsissimi resti di pavimentazione (*tabernae* n. 9, 11), che ad un primo studio sembrano di impossibile ricostruzione; ciononostante il nostro metodo di ricerca del domino fondamentale del gruppo di simmetria rivela che i frammenti sono ancora sufficienti ad una loro ricostruzione univoca.

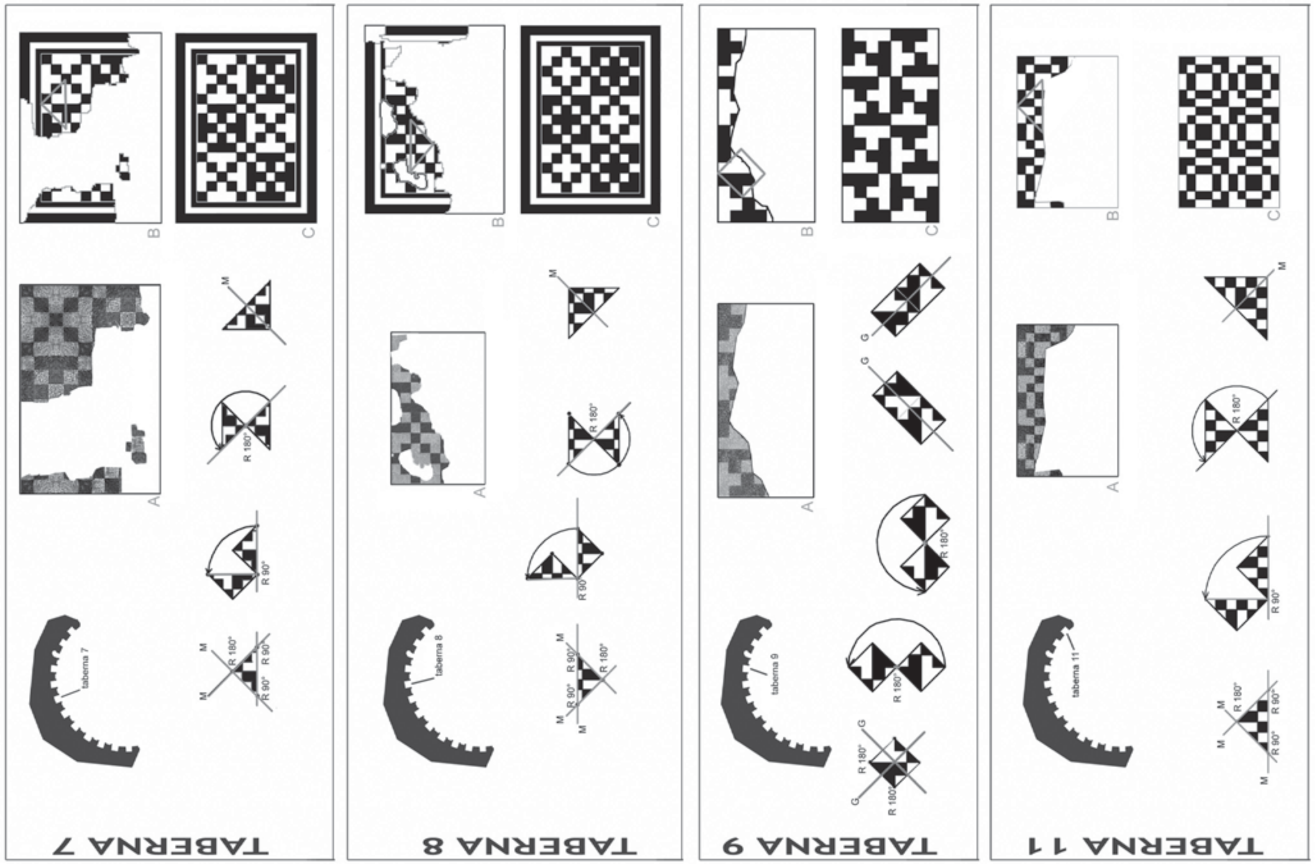
Generalmente le porzioni di pavimento rilevabili presentano il dominio fondamentale nella sua forma "connessa" (*tabernae* n. 1, 2, 4, 6, 7, 8, 11). Le condizioni di degrado sono però molto diverse tra loro tanto da rendere a volte molto difficile una lettura sintetica del motivo generale. Ad esempio, nella *taberna* n. 8 i resti di pavimentazione sono molto frammentati a causa di vere e proprie lacune entro un campo abbastanza conservato di pavimento e la presenza di poche tessere ben circoscritte, lontane dalla porzione principale (rilevabili sul lato destro). Anche se il dominio fondamentale è rimasto integro, la sua individuazione risulta più complessa a causa della presenza delle lacune interne.

La *taberna* n. 9 è l'unica a non presentare il dominio fondamentale con un aspetto connesso. In questo caso è stata necessaria un'attenta analisi delle informazioni contenute nella parte rilevabile del motivo: il dominio fondamentale è quindi stato ricostruito separatamente per ciascun movimento rigido, da zone diverse del pavimento; le informazioni sono poi state tra loro integrate

12 A. Carlini, E. Conversano, V. Sabatini, L. Tedeschini Lalli, catalogo della mostra *Immaginare Roma antica*, a cura di M. Forte, L. Ungaro, Cdrom, Imago 2005.

4-5. *Schede analitiche per i pavimenti delle* tabernae *1, 2, 4, 6, 7, 8, 9, 11.*
Per ciascuna taberna *compaiono, nella fascia superiore: posizione nell'emiciclo, fotorestituzione e rilievo dello stato attuale; nella fascia inferiore: studio geometrico dei movimenti rigidi applicati al dominio fondamentale, evidenziante la congruità delle "ripetizioni", ricostruzione del pavimento completo (A. Fotorestituzione del pavimento senza la cornice - B. Rilievo ed individuazione del dominio fondamentale - C. Pavimento completo).*




TABERNA 7
taberna 7
A
B
C
M
R 180°
R 90°
TABERNA 8
taberna 8
TABERNA 9
taberna 9
G
TABERNA 11
taberna 11

con le regole di composizione tipiche di gruppi di movimenti, constatando che in questo modo i frammenti lontani si raccordano. A questo punto è evidente che la nostra proposta di un dominio fondamentale connesso è agevole ed unica.

Considerazioni finali e sviluppi ulteriori

L'individuazione di piccolissime aree incongruenti con il disegno generale, da ricondurre a restauri e reintegrazioni successivi, è emersa da un'analisi a scala più ravvicinata, condotta sulle singole tessere. La varietà di metodo nel riposizionamento delle tessere suggerisce l'ipotesi di successivi interventi di restauro. Alcune aree di reintegrazione sono segnalate tramite perimetrazione con scossalina metallica, altre aree emergono dalla diversa fattura e/o posa in opera delle tessere. Una delle ricerche in corso è dunque la documentazione dell'entità di tali integrazioni e la datazione degli interventi.

Un'ulteriore direzione di ricerca è il repertorio di ripetizioni geometriche usato. Abbiamo riscontrato alcune analogie con pavimenti di diversa localizzazione e fattura che hanno evidenziato come motivi compositivi presi in esame ai Mercati di Traiano fossero in uso anche per destinazioni funzionali diverse da quelle commerciali. Ad esempio il pattern della *taberna* n. 6 è stato rilevato anche presso gli scavi di Ostia Antica (dove si rileva una maggiore ricchezza del motivo grafico di base) e presso la Villa dei Papiri ad Ercolano. A Villa Adriana sono presenti variazioni cromatiche dei gruppi trovati ai Mercati di Traiano. Si propone quindi una classificazione di pavimenti in *opus tessellatum* in base al motivo grafico e al gruppo cristallografico rispettato.

Dalla descrizione contenuta nelle schede nelle figure 4 e 5, si nota che nelle pavimentazioni delle *tabernae* sono presenti soltanto quattro dei diciassette possibili gruppi di tassellazione piana. Il più frequente è il gruppo P4M, che troviamo nelle *tabernae* 4, 7, 8 ed 11. Sono inoltre presenti il gruppo PGG nelle *tabernae* 1 e 9, il P4G nella *taberna* 6 ed il CMM nella 2. Non troviamo una logica nella scansione dei gruppi lungo l'emiciclo.

Questi gruppi danno luogo a pavimenti abbastanza diversi, il cui tratto geometrico comune è dato dal fatto che le rotazioni presenti seguono solo angoli multipli di 90°.

Come è chiaro nella tabella in figura 2, è in linea teorica possibile ricorrere anche ad angoli multipli di 60°. Le simmetrie esagonali o triangolari, ossia i gruppi che contengono rotazioni di 60° e 120°, sono ubique nell'apparato decorativo islamico nelle sue più articolate rappresentazioni, dalle decorazioni parietali alle pavimentazioni, dalle finestre lapidee ai motivi lignei su soffitti e portali. Nell'architettura islamica la ripetizione di motivi geometrici non riguarda solo l'aspetto decorativo bidimensionale, ma attraverso di essa sembra strutturato ogni elemento architettonico. Gli elementi usati per le decorazioni bidimensionali sono chiamati *zellij*, mentre i componenti elementari tridimensionali sono le *muqarnas*.

L'osservazione interessante da un punto di vista culturale è che questi elementi assolvono a diverse funzioni nell'architettura islamica: nascono come elementi strutturali ad oriente (Siria, Egitto, Iraq, Iran)[13] dove si trovano anche i resti più antichi, e assumono una funzione decorativa nella parte occidentale del mondo islamico (Spagna, Marocco). Nell'assumere funzione decorativa invadono la volta, usano materiali più leggeri, e pongono problemi compositivi di integrazione a diverse scale spaziali.

Conclusioni

Abbiamo qui presentato un metodo per la ricostruzione univoca dell'aspetto globale di un pavimento lacunoso, a partire dai frammenti *in loco*, su osservazioni oggettive contenute nel singolo pavimento. Questo metodo si basa sulla teoria matematica delle tassellazioni piane, che fino ad oggi, per quanto ci risulta, non era stata usata a fini di ricostruzione, cioè come modello predittivo[14], ma solo a fini analitici, cioè come modello descrittivo.

Questo uso della matematica del Novecento a fini di analisi visuale prosegue ora, come abbiamo visto, in due filoni di studio; uno, ancora sui pavimenti imperiali, riguarda più propriamente la Storia del Restauro, nonché la possibile classificazione dei metodi compositivi più adoperati in una data epoca. Il secondo, prendendo in considerazione manufatti di altre epoche ed altri contesti culturali, si pone problemi matematicamente ancora oggi aperti ed interessanti, come il problema del passaggio alle superfici curve.

Non abbiamo invece per ora affrontato il problema degli strumenti di disegno, storicamente usati nella progettazione e realizzazione di queste opere: pensiamo sia un tema che può interessare attivamente i vari ambienti presenti negli incontri *arch.it.arch*, ed in questo volume; è infatti evidente che la scelta delle possibili composizioni si accompagna alla disponibilità di strumenti materiali.

---

[13] E. Conversano, *Composizioni modulari: il caso delle cupole islamiche*, tesi di laurea Facoltà di Architettura, Università degli Studi Roma Tre, Maggio 2006.
[14] Naturalmente, nel nostro caso, la predittività riguarda lo stato delle cose in un tempo passato.