V CONGRESO INTERNACIONAL DE EXPRESIÓN GRÁFICA
XI CONGRESO NACIONAL DE PROFESORES DE EXPRESIÓN GRÁFICA
EN INGENIERÍA, ARQUITECTURA Y ÁREAS AFINES
EGraFIA 2014
Rosario, ARGENTINA
1, 2 y 3 de octubre de 2014

Farroni, Laura - Magrone, Paola
Università degli Studi di Roma Tre
Dipartimento di Architettura
laura.farroni@uniroma3.it
magrone@mat.uniroma3.it
Roma – Italia

MATHEMATICAL DRAWING MACHINES: HISTORIC DRAWING FROM A PARAMETRIC POINT OF VIEW. THE CASE OF CONIC CURVES

Disciplina: Arquitectura
Ejes de interés: Docencia

ABSTRACT (500 words in english)

This study shows a contemporary approach to the disciplines of drawing and mathematics. The goal is to underline the existing relations, between graphic and analytic representation, nowadays necessary for the cultural training of future architects. The paper shows the state of the art of the experimental work carried on by the authors in the School of Architecture of Roma Tre University to unify research and didactics on this topic.
The authors started from two parallel methods: a theoretic approach equipped with analytical proofs, and a laboratory approach. The object of the study is the construction of historical drawing instruments: historical instruments to draw conic curves and those used to trace curves in construction yards during 1800 in Italy. The graphic construction of a curve with ruler and compass will be followed by the analytical representation with parametric ad cartesian equations. During laboratorial sessions students will build mathematical drawing machines such as *ellipsographs, hyperbolographs, parabolograph* and use them to draw and explore the curves.
The goal is to stress the meaning of the characteristic *parameters* of each curve, to experiment the variations of the shape of a curve in a conscious way. When using a drawing machine, students test with their own hands how the initial "setting" influences the shape of the curve. At the same time they visualize the curve and the corresponding analytical representation.
Two-dimensional sections of three dimensional objects are curves. By creating themselves a huge collection of curves students will manage and represent many complex three dimensional objects. First of all conic curves will be presented as plane sections of a cone or, in other words, as a projection of a circle by showing 3d digital models.
Then each conic section will be defined as a *geometric locus*, followed by the description of its parametric and cartesian equation. The first machines approached are the tightened thread type, since they show clearly the geometric locus. Then students will explore instruments with linkages. There exist many different machines to draw the same conic, for example there exist at least six different ellipsographs. Different machines can be exploited to show how each drawing method stresses or hides some of the features of the corresponding curve. Then also other curves (and the related machines) will be explored, such as cycloids and epycicloids.
The interdisciplinary goals of this course are:
develop the attitude of students to understand and foresee the features of a figurative project on a two-dimensional support, from the beginning of its initial representation; provide scientific and cultural basis to handle digital modelling; strengthen their ability to integrate knowledge coming from different disciplines.

The two authors experimented this topic in a "Progetto Lauree scientifiche" (supported by the Italian Ministry of Education and University), entitled "Conic and caustic curves: relations and comparisons between graphic and mathematical methods" with high school students of "Liceo Classico Vivona" in Rome. They will start a course in the School of Architecture of Roma Tre University, during academic year 2014/2015.

1.- INTRODUZIONE

Lo studio nasce dalla volontà delle docenti di offrire un approccio contemporaneo alle discipline del disegno e della matematica. Il fine è di esplicitare le relazioni – sempre esistite - tra la rappresentazione grafica e la rappresentazione analitica e sempre più necessarie alla formazione culturale del futuro architetto. Il saggio è uno stato di avanzamento, di un lavoro che sperimenta l'unione della didattica e della ricerca applicata. Le autrici stanno affrontando questo argomento nel Progetto di Ricerca Dipartimentale interdisciplinare dal titolo "Diffusione della cultura matematica" di cui è responsabile scientifico la professoressa Laura Tedeschini Lalli. Nello specifico trattano delle costruzioni di macchine per disegnare e per il tracciamento delle curve in cantiere nell'Ottocento in Italia. Le coniche sono un argomento classico, ma in questo intervento vengono affrontate con due approcci contemporanei: quello dei matematici e quello degli architetti. Questo nasce dall'esigenza di focalizzare il concetto di parametro. L'avvento dell'informatica, sia nell'ambito della matematica che del disegno, ha prodotto softwares in cui la modifica dei parametri permette la gestione di forme semplici e complesse. Spesso le modifiche e le trasformazioni sono gestite dallo studente in modo meccanico e inconsapevole. Affinchè il futuro architetto possa creare le forme volute, le autrici propongono la sperimentazione diretta individuale come il principale strumento di conoscenza. Infatti, ad ogni studente verrà assegnato uno strumento da disegno di cui dovrà curare il progetto di realizzazione, la realizzazione e sperimentarne l'uso.

Le docenti hanno sperimentato l'argomento nel "Progetto Lauree Scientifiche" dal titolo "Coniche e curve caustiche: correlazioni, confronti e verifiche tra procedimenti grafici costruttivi e matematici" (finanziato dal Ministero dell'Istruzione Università e Ricerca) nel Liceo Classico Vivona di Roma (Figg.1-2). Inoltre attiveranno un corso opzionale, dall'A.A. 2014/2015, nell'Offerta Formativa della Laurea Triennale in Scienze dell'Architettura del Dipartimento di Architettura dell'Università degli Studi di Roma Tre.

L'approccio didattico proposto prevede:

- L'applicazione di nuove metodologie di formazione: corrispondenza tra i due saperi disciplinari nell'ambito di uno stesso tema;
- L'elaborazione di contenuti per percorsi didattici multidisciplinari;
- Incrementare negli studenti un atteggiamento critico nella verifica dell'intuizione delle forme.

Il progetto si pone come possibilità di fare rete tra la scuola secondaria e l'università. È un dato a tutti noto che le sole lezioni frontali non riescono a cogliere l'interesse dei discenti, con un naturale abbassamento degli obiettivi didattici proposti. Da qui il rafforzamento di sperimentare la didattica laboratoriale. Naturalmente sono richiesti dei prerequisiti quali la conoscenza delle costruzioni geometriche elementari, saper utilizzare gli strumenti del disegno, conoscere i primi elementi di calcolo differenziale in una variabile. Lo studio specifico parte dalle ricerche condotte ormai da diversi anni dalla Professoressa M. G. Bartolini Bussi [1-2] (Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia) sulla ricostruzione di oltre duecento macchine matematiche di interesse storico e didattico e da quelle del Professore Riccardo Migliari [3-4] sui fondamenti geometrici della rappresentazione progettuale e tecnica dell'architettura e sulla geometria descrittiva. Gli strumenti verrranno costruiti in legno e metallo nel laboratorio prototipi della Scuola di Architettura di Roma Tre.

2. - STRATEGIE DIDATTICHE E SCELTA DEI CONTENUTI

La scelta della strategia didattica è legata ad alcune considerazioni. Di seguito si elencano le principali. La prima è il tracciamento delle curve che evidenzia il problema della continuità del segno. Alcuni tra i metodi delle costruzioni grafiche, anche se rigorosi, consentono di individuare una curva per punti (ad esempio il metodo dell'ellisse dati due cerchi concentrici). È evidente che sorga il problema di tracciare una curva continua che unisca i punti individuati. Il risultato finale sarà una curva che è stata soggetta ad approssimazione. Le macchine matematiche nascono per tracciare le curve direttamente con continuità, con eccezione, solo in alcuni casi, di pochi "punti critici". Si intendono per "punti critici" quei punti in cui occorre materialmente staccare la punta della matita (o altro) dal supporto bidimensionale per poter superare l'ostacolo fisico della macchina e procedere al tracciamento del segno. Pertanto è stato deciso di selezionare delle macchine matematiche che presentino sia continuità sia discontinuità di tracciamento affinchè i discenti potessero cogliere anche questo aspetto. Altra considerazione riguarda la possibilità di riconoscere i luoghi geometrici. Ogni conica viene definita come luogo geometrico sul piano e le equazioni matematiche vengono scritte a partire dalla sua definizione. La loro descrizione e visualizzazione è immediata. Il riconoscimento geometrico è una capacità fondamentale nella formazione di un architetto. Le curve possono essere interpretate come figure piane, sezioni e profili utili alla gestione futura di oggetti tridimensionali analogici e digitali sia nel campo della progettazione architettonica che nelle forme del costruito. Il loro riconoscimento, sia grafico che analitico, dà la possibilità di associare una forma a un ente geometrico per poterlo inseguito riprodurre e modificare. Il metodo di lavoro proposto punta ad una continua verifica tra procedimento costruttivo e analitico. Infine le autrici hanno considerato il concetto di parametro. Le equazioni cartesiane di una conica contengono alcuni parametri, variando i quali si cambia la forma della curva. Tracciando una conica con la macchina e scrivendo contemporaneamente l'equazione si gestisce la variazione apportata alla forma dal cambiamento dei parametri. La verifica può essere effettuata anche in modo inverso: volendo modificare la forma di una conica in un dato modo, come si può agire sulla relativa equazione? Questa acquisizione di consapevolezza, attuata su curve conosciute e con equazioni semplici come le coniche, può essere trasferita su curve più complesse. Alla luce di quanto evidenziato si è deciso di affrontare quattro unità didattiche sul cerchio, l'ellisse, la parabola e l'iperbole suddivisa ognuna in più lezioni laboratoriali legate al modello di macchina utilizzato. Le lezioni nello specifico affrontano le *curve parametriche*, attraverso le specifiche costruzioni grafiche con riga e compasso, la costruzione e l'utilizzo di "macchine" quali alcuni ellissografi, parabolografi e iperbolografi e le loro equazioni parametriche e cartesiane. La scelta delle macchine è ricaduta su quelle dette a *filo* perchè esse hanno un funzionamento che discende direttamente dal luogo geometrico. La percezione della curva tracciata è libera da sistemi di riferimento. Al contrario l'utilizzo dell'ellisografo di Proclo è stato determinato dal fatto che la sua struttura si avvicina all'immaginario cartesiano. Al fine di rendere evidenti le considerazioni grafiche e analitiche, le docenti hanno proposto, nei corsi attuati, lezioni in copresenza. In questo modo è stata favorita l'integrazione delle competenze e il confronto dei diversi linguaggi scientifici. Per il corso svolto presso il Liceo Vivona di Roma, sono stati scelti materiali di facile reperibilità quali, il poliplat, lo spago e chiodi. Per il Corso universitario è stato programmato di far lavorare gli studenti con lo stesso materiale nella prima fase di produzione di prototipi in aula. La fase successiva avverrà nel Laboratorio Modelli e Prototipi del Dipartimento di Architettura, utilizzando il legno e il metallo (Figg. 1,2).

3.- ESEMPI DI UNITÀ DIDATTICHE

Si è proceduto per ogni unità a:

- Presentare, attraverso modelli 3D digitali, la genesi spaziale della conica come proiezione del cerchio o, equivalentemente, sezione piana del cono circolare retto;
- Definire metricamente la conica ovvero come luogo geometrico;
- Fornire le relazioni con i parametri caratteristici della conica attraverso metodi grafici e analitici;
- Scrivere le equazioni cartesiane e parametriche;
- Costruire e utilizzare la macchina;
- Proporre esercitazioni sulla variazione dei parametri sia con la macchina sia con le equazioni.

La prima unità è stata preceduta da una breve introduzione e riflessione sul compasso,il cui uso risulta spesso meccanico e inconsapevole. Il compasso è a tutti gli effetti una macchina matematica. La circonferenza è la prima delle coniche che si affrontano perchè introduce gli studenti al processo di astrazione: collegare la forma con la formula. La definizione di circonferenza è incarnata dallo strumento compasso: "*la circonferenza è il luogo dei punti del piano equidistanti da un unico punto detto centro*"; applicando direttamente la formula della distanza euclidea tra due punti del piano, i discenti ricavano l'equazione della circonferenza. A conclusione del ciclo di lezioni si è svolta una tavola rotonda per la messa in evidenza delle considerazioni e delle verifiche effettuate.

3.1 L'ELLISSOGRAFO A FILO: ESEMPIO DI MACCHINA CON DISCONTINUITÀ GRAFICA

La definizione metrica di ellisse è "*il luogo dei punti del piano tali che la somma delle distanza da due punti fissi detti fuochi è costante*". L'ellissografo a filo è una macchina estremamente semplice che permette di visualizzare questa definizione. Il metodo che si segue per disegnare l'ellisse è anche detto metodo del giardiniere, poiché piantando due pali nel terreno, usando una fune e un attrezzo appuntito per tracciare un solco, può essere tracciata la forma ellittica di una aiuola. I fuochi sono i due punti fissi F_1 ed F_2 posti a distanza *c* (Fig. 3). Si precisa che la designazione della distanza *c,* verrà poi indicata con *2c* per questioni di *eleganza* dell'equazione. La corda deve avere una lunghezza, che chiameremo 2*l*, maggiore della distanza tra i due fuochi. Tenendo la matita in modo che il filo rimanga teso, la punta traccia una curva chiusa. Più precisamente, vengono tracciate la metà superiore e inferiore della curva, staccando la matita dal supporto in corrispondenza dei punti A e B. Le curva tracciata è un'ellisse perché ogni punto che le appartiene verifica la definizione di luogo geometrico. La lunghezza della fune (che supponiamo inestensibile) mantiene fissa la somma $PF_1+PF_2= 2\,l$. Si procede a ricavare le relazioni tra distanza focale, lunghezza della corda e lunghezza dei due semiassi, i quali determinano le dimensione dell'ellisse. Ponendo il punto *P* nella posizione *D* (Fig. 4), osservando che $OF_2=c$, attraverso il Teorema di Pitagora si evince che

$$(PF_2)^{2} - c^2 = (OD)^2 \qquad (1)$$

La distanza *OD* è la misura del semiasse minore, che chiameremo *b*. Ponendo invece il punto nella posizione *B*, si deduce che la lunghezza della fune, pari a 2*l*, è anche pari al doppio dell'asse maggiore, che chiameremo *a*. Questo stesso procedimento può essere svolto con riga e compasso. Si osservi che non si può realmente porre la matita nella posizione *B*, perché la macchina pone un ostacolo fisico. Si protrebbe ipotizzare che i due paletti posti nei fuochi siano puntiformi, ovvero senza dimensione. I discenti devono essere in grado di impostare il loro ellissografo a filo conoscendo gli assi. Ovvero si debbono porre il problema di tracciare una ellisse di dimensioni assegnate, quindi di impostare la macchina con la giusta distanza focale e lunghezza del filo. A questo punto ricavano l'equazione cartesiana dell'ellisse partendo dalla sua definizione come luogo geometrico. Anche in questo caso si sottolinea la validità di rendere attivo lo studente nel processo di astrazione. Per procedere alla scrittura dell'equazione è opportuno introdurre un sistema di riferimento cartesiano. Se ne posiziona l'origine sull'asse focale, nel suo punto medio. Sia *P(x,y)* il generico punto sulla curva tracciata. Le coordinate dei due fuochi sono: F_1 *(-c,0)*, F_2 *(c,0)*. Utilizzando la formula della distanza euclidea nel piano, si calcolano le misure dei segmenti PF_1 e PF_2. Quindi si costruisce l'equazione $PF_1 + PF_2 = 2l$, che risulta essere

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (2)$$

Il parametro *a* indica la misura del semiasse lungo l'asse delle ascisse, la *b* il semiasse lungo le ordinate. Per rafforzare la capacità di riconoscere il ruolo dei parametri risulta utile fornire un esercizio come di seguito: dati i semiassi, scrivere l'equazione dell'ellisse corrispondente, centrata nell'origine degli assi o in un punto qualunque del piano, di coordinate assegnate. Il problema del riconoscimento delle curve verrà proposto agli studenti di architettura con la richiesta di verificare se una curva chiusa (fornita come immagine) è o meno una ellisse. L'immagine può essere estratta da un'architettura costruita.

3.2- L'ELLISSOGRAFO DI PROCLO: ESEMPIO DI MACCHINA CON CONTINUITÀ GRAFICA

Del compasso ellittico od ovale. Dietro le proprietà testè riconosciute nei fochi dell'ellissi, si è immaginato per descrivere questa curva uno strumento composto di una specie di croce, munito d'incavature nelle quali si mettono perni o tasselli mobili fatti a coda di rondine, in guisa che possano muoversi senza uscirne; vi si adatta un regolo che entra negli assi di tali perni, o che si applica in modo da tenerli ad una distanza determinata senza impedirli di strisciare per le incavature. Da tale disposizione risulta che facendo muovere questo regolo, la punta si avanza secondo un rapporto che varia in ragione della distanza dei perni. Così, facendo questa distanza eguale alla differenza dei due assi di un'ellissi, posta una punta o una matita in capo a questo regolo descriverà tal curva: e siccome si può cangiare a piacere tale distanza, si vede che con questo strumento si può descrivere ogni specie d'ellissi. Da Trattato teorico Pratico dell'arte di edificare di G. Rondelet, Tomo II, Stereotomia, Libro III, Sezione Prima, Le curve chiuse, 1833 [5]

In questo secondo caso, i fuochi non compaiono (sono "nascosti") e si procede partendo dati i semiassi minore e maggiore. La costruzione della macchina consente di far emergere il concetto di parametro, attraverso la manuale variazione delle posizioni di *A*, *B* e *P* sull'asta (Fig. 5). Si osservi che pur variando manualmente due quantità, le lunghezze dei semiassi, il parametro essenziale che determina la forma dell'ellisse è uno solo: il rapporto tra i due semiassi. I punti *A* e *B* dell'asta *AP* sono vincolati a scorrere lungo due guide ortogonali. Il segmento *AP* rappresenta l'asse maggiore, mentre il segmento *BP* rappresenta l'asse minore. Il punto *P*, quando A e B traslano lungo le guide, traccia la curva. Avvicinando *B* a *P*, i due semiassi *AP* e *BP* risulteranno molto diversi tra loro e l'ellisse tracciata sarà molto eccentrica. Avvicinando *B* ad *A* fino a farli coincidere, si ottiene una configurazione limite della macchina che si comporta come un compasso. Nella figura 5 i punti *A, B*, *P* sono allineati. Disassando *A* e *P* (Fig. 6) il punto *P* continua a muoversi in modo solidale con la macchina, pertanto descrive una ellisse, con assi ruotati rispetto alle guide. Gli studenti sperimentano la possibilità di ottenere la stessa ellisse in due modi diversi ossia con diverso orientamento, variando la posizione di *P*, che dall'estremo della barretta si colloca tra *A* e *B*. Questa condizione è legata alla fattura dello strumento, poichè le guide possono risultare un ostacolo fisico al tracciamento.

Si introduca un riferimento cartesiano coincidente con le guide. Siano *(x,y)* le coordinate del punto *P* appartenente alla curva. I triangoli *APM* e *BPN* sono simili (Fig.7), pertanto vale la proporzione *AP:BP=PM:PN*. Ricordando che: *AP=a*, *BP=b*, *PM=x*, $PN=\sqrt{(b^2 - y^2)}$, sostituendo si ottiene l'equazione (2), quindi *P* appartiene all'ellisse di semiassi *a* e *b*.

3.3- IL PARABOLOGRAFO A FILO

La parabola è il luogo "*geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto detto fuoco e da una retta detta direttrice*". Sul supporto bidimensionale si fissi un regolo (direttrice *d*) si scelga un punto (fuoco *F*) su cui piantare un chiodo. Su un altro regolo graduato, posto perpendicolarmente alla direttrice, si fissi un punto *A* su cui posizionare il secondo chiodo (Fig. 8). La lunghezza del filo è data dalla distanza tra *A* e la direttrice. Si fissi il filo nei punto *F* ed *A*. E' opportuno traslare il regolo lungo la direttrice fino a far tendere il filo per iniziare a tracciare la parabola. Si pone la matita in *A*, tenendola attaccata al regolo. Facendo scorrere il regolo graduato sulla direttrice la matita traccia una parabola. Questa macchina presenta una discontinuità grafica nel tracciare la curva, perché arrivata alla prima metà, occorre riposizionare il chiodo sulla parte opposta del regolo (Fig. 8). La discontinuità avviene in corrispondenza del punto che si identifica geometricamente nel vertice. Consideriamo ora un riferimento cartesiano con asse delle ascisse coincidente con la direttrice e asse delle ordinate passante per il fuoco. Sia *a* la distanza tra fuoco e direttrice ed *L* la lunghezza del filo. *P* è il punto appartenente alla curva tracciata. La definizione di parabola impone che la distanza *PF* (Fig. 8) sia uguale alla distanza di *P* da *d*, ovvero *PK*. Siano (*x,y*) le coordinate del punto *P* nel riferimento cartesiano fissato: *P"H=x*, *P"K"=y*. Inoltre considerando il triangolo rettangolo *P"HF*, per il teorema di Pitagora:

$$FP'' = \sqrt{x^2 + (y-a)^2} \qquad (3)$$

l'equazione *FP"= P"K"* si traduce in

$$y = \sqrt{x^2 + (y-a)^2} \qquad (4)$$

elevando al quadrato e semplificando si ottiene

$$y = \frac{x^2}{2a} + \frac{a}{2} \qquad (5)$$

Il parametro che permette di variare la forma della parabola è a, la distanza fuoco-direttrice. Allontanando fuoco e direttrice si ottiene una parabola più ampia.

L'IPERBOLOGRAFO A FILO

La definizione metrica di iperbole è "*luogo dei punti del piano la cui distanza da due punti fissi detti fuochi è constante*". Siano dati due punti qualunque F_1 ed F_2 sul piano, posti a distanza $2c$. Come gli altri strumenti a filo anche questo agisce evidenziando il luogo geometrico (Fig. 9). Un'asta AF_1 è imperniata sul supporto bidimensionale nel fuoco F_1 ed è lunga L. Un filo di lunghezza a ($a<L$) ha gli estremi fissati in A e in F_2. Si ponga la punta della matita in P, che inizialmente coincide con A, facendola poi scorrere verso F_1, tenendo il filo teso accostato all'asta, e facendo ruotare quest'ultima attorno ad F_1: il punto P descrive un arco di iperbole. Infatti $PF_1 - PF_2 = (L-AP)-(a-AP) = L-a = K$, quantità che rimane costante al variare di P lungo la curva tracciata. Si ribadisce quindi che la costante che compare nella definizione metrica è pari alla differenza tra la lunghezza dell'asta e quella del filo. L'iperbole tracciata incontra l'asse focale in due punti che prendono il nome di vertici (V_1 e V_2). La macchina presenta una discontinuità nel tracciamento quando l'asta incontra il fuoco a cui non è imperniata, ovvero quando dovrebbe passare per uno dei vertici. (Fig. 9). Anche i vertici devono verificare la definizione metrica, pertanto $V_1F_2 - V_1F_1 = L-a$, e da ciò si ricava facilmente che la distanza tra i due vertici è pari anch'essa a $L-a$ (Fig. 9). Si osservi che il filo può esser anche più lungo dell'asta. Deve avere necessariamente lunghezza strettamente minore di $L+2c$ e non può essere uguale ad a. In entrambi questi casi limite, si otterrebbero iperboli degeneri. Fissiamo ora un riferimento cartesiano bidimensionale, il cui asse delle ascisse coincide con l'asse focale e origine nel punto medio di tale segmento. Partendo dalla definizione di luogo geometrico, sia P il generico punto sull'iperbole, di coordinate (x,y). I fuochi in questo riferimento avranno coordinate $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$. Procedendo come nei casi delle altre macchine a filo, applicando direttamente la formula della distanza euclidea e imponendo che $PF_1 - PF_2 = L-a$, si ottiene

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1 \qquad (6)$$

Per ottenere una formula più sintetica si pone $b^2 = c^2 - a^2$. La definizione metrica di iperbole prevede che si abbiano due dati: la distanza focale e la differenza delle distanze tra punto e fuochi, che deve rimanere costante. Nella macchina questo si riflette nello scegliere i due fuochi, in cui sono piantati i chiodi e nello scegliere asta e filo in modo da deciderne la differenza delle lunghezze. A parità di distanza focale, variando asta e filo, si cambia la forma dell'iperbole (o viceversa). Poiché la distanza tra i vertici è uguale a ($L-a$), per ottenere iperboli diverse si deve cambiare questo parametro tenendo fissi i fuochi. In altre parole, si cambia la distanza vertice fuoco.

Alcune osservazioni sugli asintoti: è dato il triangolo rettangolo OV_2N (Fig. 10) i cui cateti misurano a, b e l'ipotenusa c. La retta su cui si trova l'ipotenusa ha coefficiente angolare b/a. Pertanto è l'asintoto dell'iperbole, che come è noto ha equazione $y=(b/a)x$. Osservando l'andamento del coefficiente angolare, si evince che se fuochi e vertici vanno a coincidere, si ottiene un asintoto coincidente con l'asse delle ascisse, ovvero una iperbole degenere (una retta). Se invece i fuochi si allontanano "indefinitamente", ovvero se si fanno tendere i fuochi all'infinito, si ottiene un asintoto verticale, e di nuovo una iperbole degenere. Questa macchina traccia ovviamente uno solo dei due rami di iperbole. Il secondo ramo verrà tracciato invertendo il ruolo dei fuochi.

1. CONCLUSIONI E SVILUPPI FUTURI

Ogni curva disegnata con una macchina, stabilendo e poi variando i dati di partenza, pone lo studente protagonista attivo del tracciamento e della corrispondente rappresentazione analitica. Egli sarà invogliato a sperimentare/verificare le curve presenti nell'architettura costruita. Obiettivo è ampliare la conoscenza attraverso l'elaborazione di un inventario o collezione di curve, attraverso il riconoscimento rigoroso della forma, della misura e della sua costruzione. In futuro saranno affrontate altre curve come le cicloidi, le epicicloidi, le spirali. Per quanto riguarda gli sviluppi in laboratorio, si procederà alla costruzione della Macchina del Pillet, descritta nelle Questioni Tecniche del mensile di Architettura Pratica [6], come elliss-iperbol-parabolografo. Questo strumento viene suggerito per tracciare in modo continuo le tre coniche. Il funzionamento dello strumento si basa sui principi dellle macchine a filo. Inoltre il suo uso viene menzionato come strumento nei cantieri per tracciare le curve delle centine delle volte. Tale fase si concretizzerà nel Laboratorio Modelli e Prototipi del Dipartimento di Architettura, utilizzando il legno e il metallo.

RIFERIMENTI

[1] BARTOLINI BUSSI M.G.C, MASCHIETTO M. (2006). Macchine matematiche : dalla storia alla scuola.

[2] http://www.macchinematematiche.org

[3] MIGLIARI R. (1983). Fondamenti geometrici della rappresentazione progettuale e tecnica dell'architettura. *Tomo 2.*

[4] MIGLIARI R. (2009). Geometria descrittiva.

[5] RONDELET G.B. (1833). Trattato teorico Pratico dell'arte di Edificare, Tomo II.

[6] L'architettura pratica. Disegni degli edifizi rispondenti ai bisogni moderni, Anno II, Fascicolo VII (1891), 26-27.

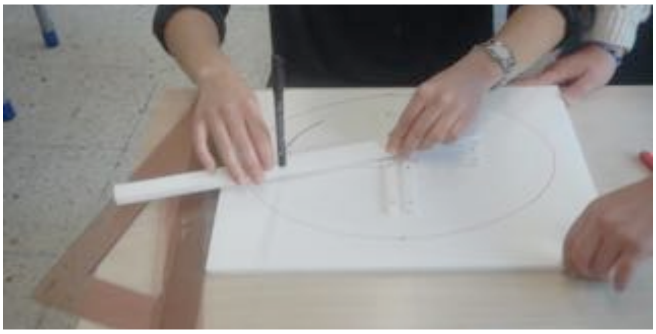

Figura 1. Attività laboratoriale su ellissografo di Proclo

Figura 2. Attività laboratoriale su ellissografo di Proclo

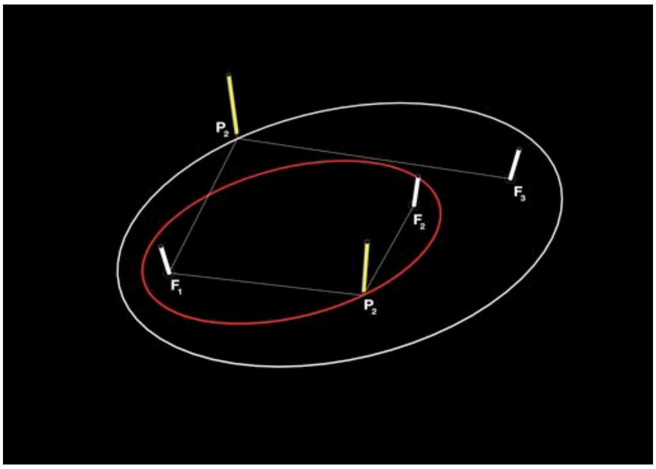

Figura 3. Ellisse come luogo geometrico

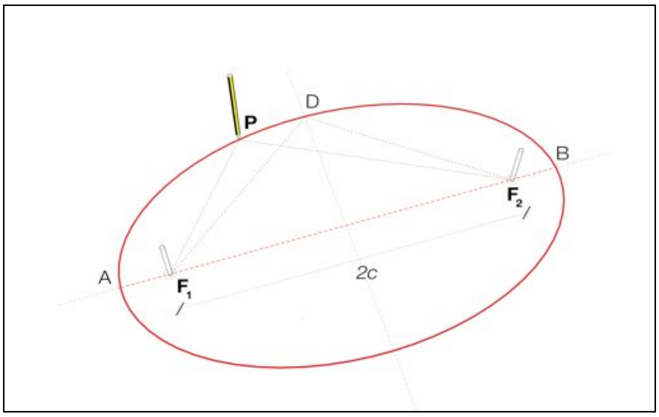

Figura 4. Trattacciamento ellisse con ellissografo a filo

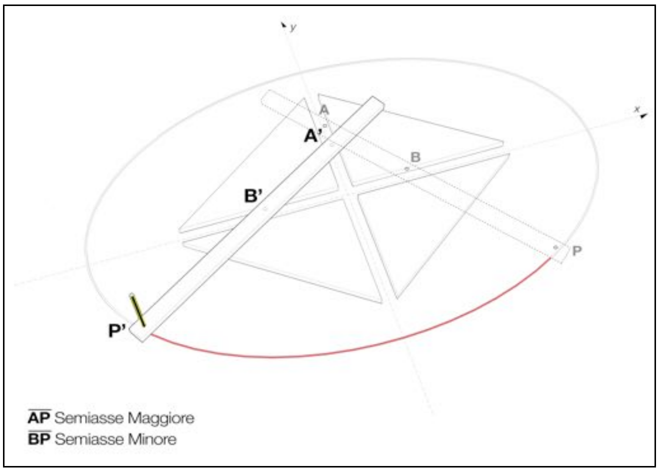

Figura 5. Funzionamento dell' ellissografo di Proclo

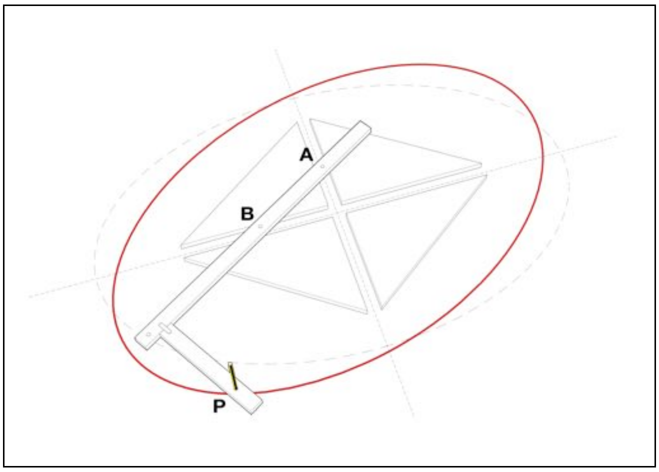

Figura 6. Variazione della posizione di P nell'ellissografo di Proclo

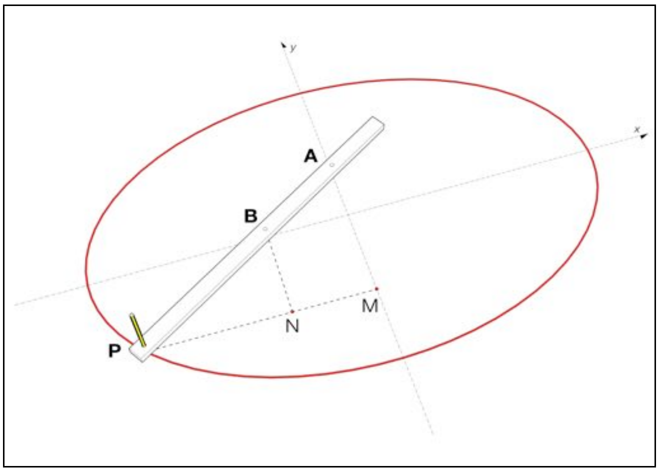

Figura 7. Confronto tra rappresentazione analitica e grafica

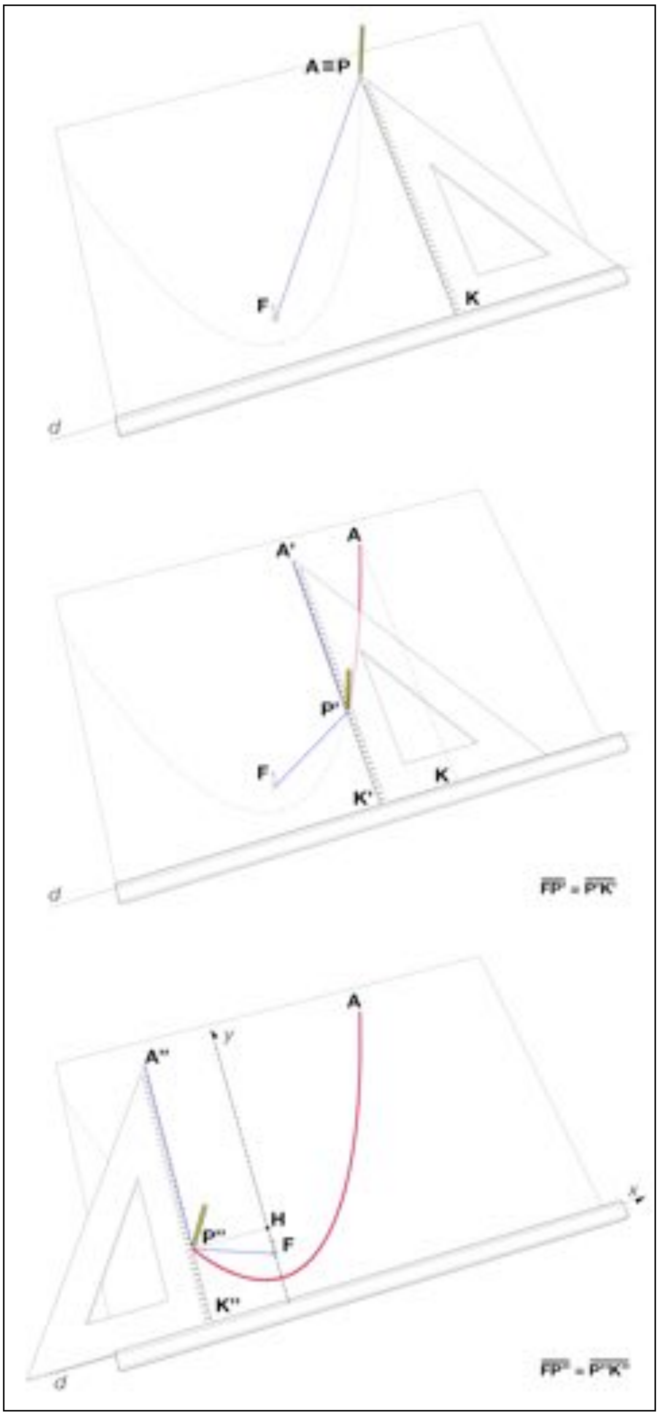

Figura 8. Funzionamento parabolografo a filo

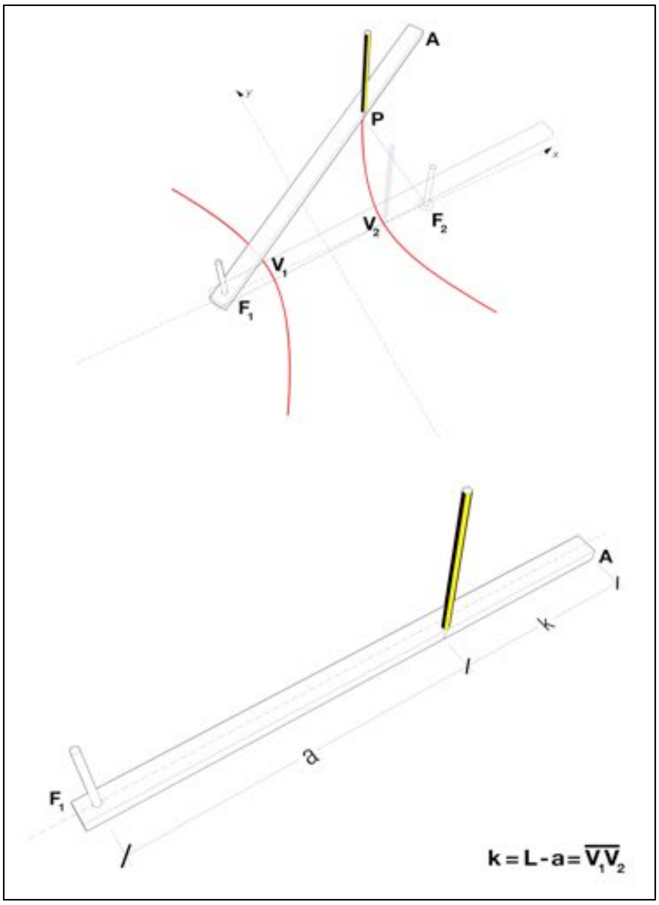

Figura 9. Funzionamento iperbolografo a filo e visualizzazione dei parametri

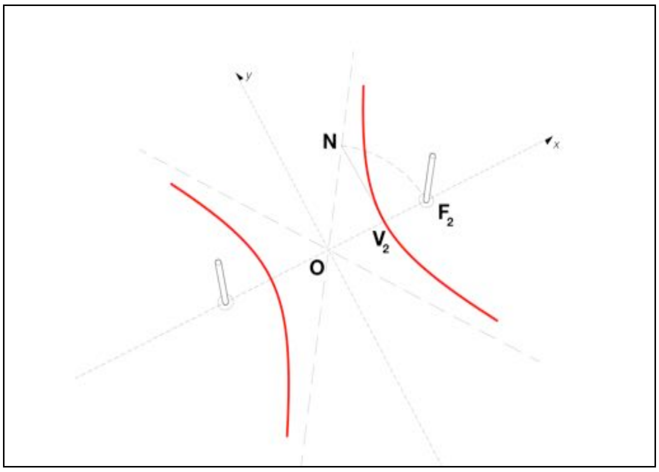

Figura 10. Osservazioni grafiche sugli asintoti

Le immagini sono state elaborate dall'architetto Enrico Mele, borsista post-lauream del Dipartimento di Architettura dell'Università degli Studi Roma Tre