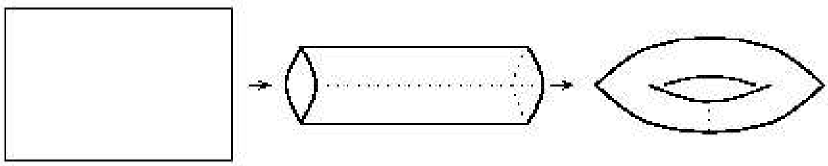
3.5 Il toro

3.5.1 Modelli di toro

Modelli di carta

Esempio 3.5.1 ***Toro 1*** *Il modello di toro finito che ciascuno può costruire è ottenuto incollando a due a due i lati opposti di un foglio rettangolare.*



Esercizio 3.5.1 **(a)** *Costruite un toro le cui dimensioni sia rispettivamente 10 e 20 centimetri.*

(b) *Supponete di avere davanti a voi un toro di carta e di disporre unicamente di un metro rigido e di non sapere la formula della lunghezza della circonferenza. Quali azioni dovete compiere per misurare le dimensioni del toro?*

(c) *Avete davanti a voi un foglio di carta rettangolare su cui sono disegnate tre rette: una orizzontale, una vericale ed una obliqua. Che tipo di curve appariranno sul toro costruito da tale foglio? (Per prima cosa cercate di visualizzare le operazione manuali che dovreste compiere e solo in un secondo momento risolvete fisicamente l'esercizio).*

(d) *Su un foglio rettangolare è disegnato un quadrato i cui lati sono paralleli ai lati del foglio. Che figura appare sul toro ottenuto incollando i lati?*

Esercizio 3.5.2 *Considerate il rettangolo*
$S = \{(x, y) \in \mathbf{R^2} : \mathbf{0 \leq x \leq 10},\, \mathbf{0 \leq y \leq 20}\}.$

(a) *Come appare sul toro costruito dal rettangolo la retta di S di equazione $y = x$?*

(b) *E la retta di equazione $y = mx$?*

(c) *E la retta di equazione $y = mx + q$?*

Modelli matematici

Per realizzare (come oggetto matematico) un toro, dobbiamo formalizzare le costruzioni fatte precedentemnete con la carta.

Incollare lati paralleli (verticali) di un rettangolo equivale ad identificare i punti sui due lati che giacciono alla stessa altezza.

Esercizio 3.5.3 **(a)** *Definire la regola che rappresenta l'incollamento dei lati nel rettangolo la cui base è rappresentata dal segmento* $[0, 10]$ *e la cui altezza è rappresentata dal segmento* $[0, 20]$.

(b) *Definire la regola che rappresenta l'incollamento dei lati nel rettangolo la cui base è rappresentata dal segmento* $[0, 20]$ *e la cui altezza è rappresentata dal segmento* $[0, 10]$.

Esempio 3.5.2 Consideriamo il rettangolo $R = [0, 10]\times[0, 20]$. Siano $(x, y)\,, (x', y') \in R$. Tali punti rappresentano lo stesso punto nel toro che si ottiene avvolgendo due volte R se e solo se

$$x' = x + 10,\ y' = y$$

$$\text{oppure}$$

$$y' = y + 20,\ x' = x.$$

Esercizio 3.5.4 *Verificare che il punto* $(0, 0)$ *è identificato con i punti e* $(0, 20)\,, (10, 0)\,, (10, 20)$.

Esercizio 3.5.5 *Definire la regola che rappresenta l'incollamento dei bordi del rettangolo la cui base è rappresentata dal segmento* $[0, 40]$ *e la cui altezza è rappresentata dal segmento* $[0, 20]$.

Consideriamo ora $\mathbb{R}^2$.

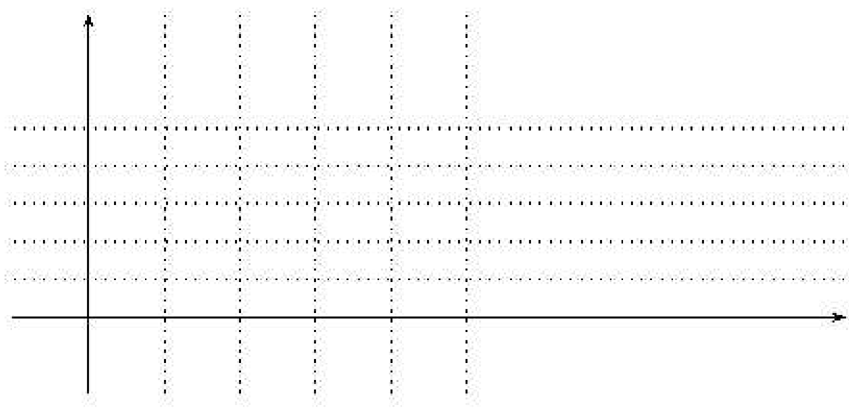
Dobbiamo considerare l'intero piano reale $\mathbb{R}^2$ e cercare di costruire un toro. Come fatto nel caso del cilindro dobbiamo eseguire una operazione concettuale, che ha una sua natura concreta (è espressa da relazioni). Anche imn questo caso l'oggetto che costruiamo non è una superficie immersa in $\mathbb{R}^3$ ma uno spazio che esiste indipendentemente da uno spazio ambiente più grande.

Nel caso del toro, per ogni scelta di $m, n \in \mathbb{R}$ possiamo definire una relazione di equivalenza come segue: la coppia (x, y) è in relazione alla coppia (x, y) se e solo se

$$x' = x + hm, \quad y' = y \quad h \in \mathbb{Z}$$
$$\text{oppure}$$
$$x' = x, \quad y' = y + kn \quad k \in \mathbb{Z}.$$

o, equivalentemente

$$x' = x + hm, \quad y' = y + kn \quad h, k \in \mathbb{Z}$$



Esercizio 3.5.6 *Verificate l'equivalenza tra le due definizioni.*

Esercizio 3.5.7 *Verificate che abbiamo appena definito una relazione di equivalenza su* $\mathbb{R}^2$.

Esempio 3.5.3 Lo spazio quoziete $\mathbb{R}^2/\sim$ è un toro. Denotiamo tale spazio con il simbolo T. Ciò che abbiamo fatto non è altro che identificare coppie di punti in $\mathbb{R}^2$ che possono essere unite attraverso una traslazione di passo hm nella direzione x oppure kn nella direzione y.

Esercizio 3.5.8 *Considerate una retta passante per l'origine. Qual è l'immagine di tale retta sul toro costruito attraverso la relazione di equivalenza appena definita nel caso in cui:*

(a) *la retta è verticale?*

(b) *la retta è orizzontale?*

(c) *la retta è obliqua?*

Esercizio 3.5.9 *Fissiamo ora* $m = 2$, $n = 4$.

(a) *Quali sono le dimensioni del toro costruito attraverso la relazione di equivalenza definita per* $m = 2$, $n = 4$*?*

(b) *Considerate il segmento* s *che unisce i punti* $P = (0, 1)$ *e* $Q = (1, 1)$. *Qual è l'immagine di* s *sul toro?*

(c) *Considerate il segmento* s *che unisce i punti* $P = (0, 2)$ *e* $Q = (2, 2)$. *Qual è l'immagine di* s *sul toro?*

(d) *Considerate il segmento* s *che unisce i punti* $P = (0, 3)$ *e* $Q = (3, 3)$. *Qual è l'immagine di* s *sul toro?*

(e) *Considerate il quadrato* Q *di vertici* $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(1, 0)$. *Qual è l'immagine di* Q *sul toro?*

(f) *Considerate il quadrato* Q *di vertici* $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 2)$, $(2, 0)$. *Qual è l'immagine di* Q *sul toro?*

(g) *Considerate il quadrato* Q *di vertici* $(0, 0)$, $(0, 3)$, $(3, 3)$, $(3, 0)$. *Qual è l'immagine di* Q *sul toro?*

(h) *Siano* $P = (0, 2)$ *e* $Q = (2, 2)$ *due punti in* $\mathbb{R}^2$*. Qual è la loro distanza in* $\mathbb{R}^2$*? E sul toro ottenuto attraverso la relazione di equivalenza per* $m = 2$, $n = 4$*?*

(i) *Siano* $P = (0, 3)$ *e* $Q = (3, 3)$ *due punti in* $\mathbb{R}^2$*. Qual è la loro distanza in* $\mathbb{R}^2$*? E sul toro ottenuto attraverso la relazione di equivalenza per* $m = 2$, $n = 4$*?*

Esempio 3.5.4 ***Toro come superficie di rotazione*** *Il toro può essere pensato come una superficie di rotazione. In tal caso occorre ruotare una circonferenza attorno ad un asse di rotazione lungo una seconda circonferenza.*

Denotiamo con γ la circoferenza che ruota e con Γ la circonferenza attorno alla quale facciamo muovere γ e sia c il raggio della circonferenza Γ e sia a il raggio della circonferenza γ. Il centro della circonferenza Γ è l'origine degli assi mentre il centro della circonferenza γ giace su Γ.

Esempio 3.5.5 ***Equazione parametrica del toro*** *Sia* ϕ *l'angolo che descrive i punti sulla circonferenza* Γ *e sia* ψ *l'angolo che descrive i punti sulla circonferenza* γ*. Allora*

$$\begin{aligned} x &= (c + a\cos(\psi))\cos(\phi) \\ y &= (c + a\cos(\psi))\sin(\phi) \\ z &= a\sin(\psi) \end{aligned}$$

dove $0 \leq \phi \leq 2\pi$ *e* $0 \leq \psi \leq 2\pi$*.*

Esercizio 3.5.10 *Supponiamo che* $a = 2$ *3* $c = 4$*.*

(a) *Trovate le intersezioni del toro con la retta passante per l'origine e parallela al vettore* $(1, 1, 1)$*;*

(b) *Quale figura sul toro è rappresentata da* $\phi =$ *costante? E da* $\psi =$*costante?*

(c) *Quale figura sul toro è rappresentata da* $\phi = \psi$*?*

Esempio 3.5.6 ***Equazione cartesiana del toro*** *Un toro di dimensioni* a, c *centrato nell'origine degli assi ha equazione cartesiana:*

$$(c - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 = a^2$$

Esercizio 3.5.11 *Dedurre l'equazione cartesiana dall'equazione parametrica del toro.*

Soluzione: come sempre quando compaiono le funzioni seno e coseno dobbiamo cercare di eliminare i parametri sommando opportunamente i quadrati delle tre coordinate.Nel nostri caso si ha: $x^2 + y^2 = (c + a\cos\psi)^2$ e $z^2 = a\sin^2\psi$. Da questo segue che $(c - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 = a^2$

Esercizio 3.5.12 *Supponiamo che $a = 1$ 3 $c = 2$.*

(a) *Trovate le intersezioni del toro con il piano passante per l'origine e perpendicolare al vettore* $(1, 1, 1)$*;*

(b) *Trovate le intersezioni del toro con il piano passante per* $P = (1, 0, 0)$ *e perpendicolare al vettore* $(0, 0, 1)$.

3.5.2 Curve sul toro

Esercizio 3.5.13 **(a)** *Considerate una retta nel piano passante per l'origine. Qual è l'immagine di tale retta sul toro costruito attraverso la relazione di equivalenza definita su $\mathbb{R}^2$ nel caso in cui:*

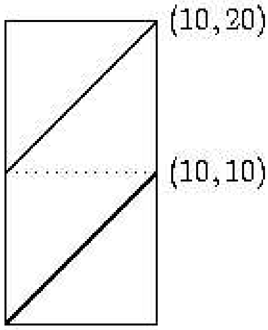
1. *la retta è verticale?*
2. *la retta è orizzontale?*
3. *la retta è obliqua?*

(b) *Supponete ora di costruire un toro identificando i bordi di un rettangolo di dimensioni pari rispettivamente a 10 e 20. Alla luce dell'esercizio precedente conosciamo l'immagine*

(a) *delle rette in $\mathbb{R}^2$. Quali curve nellrettangolo danno origine alla stessa immagine?*

Esercizio 3.5.14 *Considerate un rettangolo $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 10,\ 0 \leq y \leq 20\}$ e si T il toro costruito identificando i bordi di R.*

(a) *Considerate la retta di equazione $y = x$. Verificate che sul toro l'immagine della la retta è una curva chiusa.* Soluzione: è sufficiente osservare che (sul toro) la retta passa per $(0, 0)$ e per $(10, 20)$. Infatti l'immagine della curva sul toro



(b) *Verificate che lo stesso succede per la curva $y = mx$ con $m \in \mathbb{N}$*

(c) *Verificate che lo stesso succede per la curva $y = mx$ con $m \in \mathbb{Z}$*

L'esercizio precedente è forse più chiaro se consideriamo il toro che viene costruito dalla relazione di equivalenza su $\mathbb{R}^2$. Infatti per un toro di dimensioni pari a 10 e 20 la relazione di equivalenza è data da: $x' = x + 10h, \quad y' = y + 20k$ con$h, k \in \mathbb{R}^2$.

Esercizio 3.5.15 (a) *Considerate il toro costruito attraverso la relazione di equivalenza appena definita. Dimostrate che l'immagine sul toro delle rette $y = mx$ con $m \in \mathbb{Q}$ sono chiuse.*

Soluzione: se $m \in \mathbb{Q}$ esisto due numeri interi $p, q \in \mathbb{Z}$ tali che $m = \frac{p}{q}$, quindi la retta si può scrivere come $qy = px$. sappiamo che la retta passa per l'origine. Vogliamo dimostrare che dopo un certo numero di giri attorno al toro passa una seconda volta per l'origine. Questo equivale a dimostrare che in $\mathbb{R}^2$ la retta passa per un punto di coordinate $10h, 20k$ per qualche $h, k \in F$. Basta scegliere $h = q$ e $k = p$.

(a) *Verificate che l'esercizio precedente è vero per qualunque scelta delle dimensioni del toro.*

3.5.3 Coordinate intrinseche

Dalla equazione parametrica del toro sappiamo che ogni punto su questa superficie è completamente identificato dai valori dagli angoli phi, ψ.

Le coordinate intrinseche del cilindro sono quindi date dalla coppia (ϕ, ψ) con $0 \leq \phi, \psi \leq 2\pi$.

Quindi i punti sul cilindro (superficie dello spazio tridimensionale xyz) vivono nel quadrato $Q = \{(\phi, \psi) : 0 \leq \phi \leq 2\pi,\ 0 \leq \psi \leq 2\pi\}$.

Esercizio 3.5.16 *Disegnare sul toro di dimensioni 10, 20 le curve di equazione*

(a) $\phi =$*costante.*

(b) $\psi =$ *costante.*

(c) $\phi = \psi$.

(d) $\phi = 3\psi$.

Suggerimento: fate riferimento alla costruzione del cilindro come spazio quoziente

Esercizio 3.5.17 *Calcolate la lunghezza delle seguenti curve*

(a) $\phi = \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{4}$ *sul toro di dimensioni 10, 20.* Soluzione: utilizzare l'equazione paramatrica

$$\begin{aligned} x &= (c + a\cos(\psi))\cos(\frac{\pi}{2}) \\ y &= (c + a\cos(\psi))\sin(\frac{\pi}{2}) \\ z &= a\sin(\psi) \end{aligned}$$

(b) $\phi =$*costante,* $0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{4}$ *sul toro di dimensioni 1, 2.*

(c) $\psi = \frac{\pi}{4}$ $\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \pi$ *sul toro di dimensioni 1, 2.*

(d) $\psi =$ *costante* $\frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \pi$ *sul toro di dimensioni 2, 4.*

(e) $\phi = \psi$ *con* $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ *sul toro di dimensioni 1, 2.*

(f) $\phi = 3\psi$ *con* $0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{4}$ *sul toro di dimensioni 1, 2.*

3.5.4 Distanza sul toro

Anche nel caso del toro, ovviamente, utilizzeremo la costruzione di questo spazio attraverso la relazione di equivalenza. Ancora una volta per convincerci del fatto che la distanza è localmante euclidea osserviamo che il toro può, come il cilindro, essere approssimato, da un solido ottenuto dalla rotazione di un poligono di un numero di lati sufficientemente grande attorno ad un altro poligono ugualmente formato da un numero grande di lati.

Esercizio 3.5.18 **(a)** *Sia R un rettangolo in $\mathbb{R}^2$. Ogni curva η su R corrisponde ad una curva η' sul modello di toro T ottenuto incollando i lati di R. Verificare che le due curve hanno la stessa lunghezza.*

(b) *Qual è la distanza tra due punti P_1 e P_2 sul rettangolo che sono alla stessa altezza e tali che P_1 è sul bordo sinistro e P_1 è sul bordo destro? Qual è la loro distanza sul toro ottenuto incollando i bordi del rettangolo?*

Esercizio 3.5.19 *Considerate un foglio di carta rettangolare di base 10 centimetri e di altezza 20 centimetri. Sia $P_o = (x_o, y_o)$ un punto interno al rettangolo (i bordi verticali fanno parte del rettangolo). Verificate che*

1. $d_1 = \operatorname{dist}((x_o, y_o), (0,0)) = \sqrt{x_o^2 + y_o^2}$
2. $d_2 = \operatorname{dist}((x_o, y_o), (0,20)) = \sqrt{(x_o - 10)^2 + y_o^2}$
3. $d_1 \leq d_2$ *se e solo se* $x \leq 5$

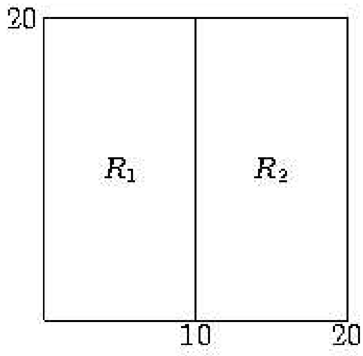
Esercizio 3.5.20 *Considerate un foglio di carta rettangolare di base 10 centimetri e di altezza 20 centimetri e costruite un toro incollando i bordi.*

(a) *Cosa succede ai punti $O = (0,0)$ e $A = (0,20)$? E ai punti $B = (10,0)$, $C = (10,20)$?*

(b) *Qual è la lunghezza delle curve (sul toro) che uniscono il punto $P_o = (x_o, y_o)$ ai punti O e A rispettivamente? Qual è la distanza (sul toro) del punto $P_o = (x_o, y_o)$ dai punti O e A rispettivamente?*

Senza ripetere nei dettagli gli argomenti utilizzati per definire la distanza sul cilindro riprendiamo l'idea che era alla base di quella costruuzione.

Per calcolare la distanza tra due punti P e Q sul toro, dobbiamo rappresentare tali punti su almeno due rettangoli R_1, R_2 adiacenti, le cui dimensioni corrispondano alle dimensioni del toro. Supponiamo per il momento che $R_1 = \{0 \le x \le 10,\, 0 \le y \le 20\}$ e $R_2 = \{10 \le x \le 20,\, 0 \le y \le 20\}$



Esercizio 3.5.21 *Siano $P = (x_o, y_o)$ e $Q = (x_1, y_1)$. Verificate che i rappresentanti di P e Q in R_1 sono i punti di coordinate (x_o, y_o) e (x_1, y_1) rispettivamente e che i rappresentanti di P e Q in R_2 sono i punti di coordinate $(x_o + 10, y_o)$ e $(x_1 + 10, y_1)$.*

Sia s_1 il segmento di retta che unisce P e Q che giace interamente nel rettangolo R_1 e sia s_2 il segmento di retta che unisce P e Q che attraversa la retta verticale r di equazione $x = 10$.

Esercizio 3.5.22 *Scrivete le equazioni di s_1 e s_2.*

Esercizio 3.5.23 *Verificate che le immagini di s_1 e s_2 sul toro sono curve che uniscono P e Q.*

Possiamo quindi calcolare (sul piano $\mathbb{R}^2$) la lunghezza di s_1 e s_2.

Esercizio 3.5.24 *Calcolare la lunghezza di s_1 e s_2.*

Un valore possibile per la distanza tra P e Q sarà il valore minimo tra $l(s_1)$ e $l(s_2)$.

Esercizio 3.5.25 *Cambia qualcosa prendendo altri due rettangoli adiacenti?*

La risposta al precedente esercizio dipende dalla differenza tra le coordinate dei punti. Sia b la lungehzza della base e sia h la lunghezza dell'altezza del rettangolo di riferimento. I casi possibili sono:

1. la differenza tra le coordinate x è minore di $\frac{b}{2}$ e la differenza tra le coordinate y è minore di $\frac{h}{2}$

2. la differenza tra le coordinate x è maggiore di $\frac{b}{2}$ e la differenza tra le coordinate y è minore di $\frac{h}{2}$

3. la differenza tra le coordinate x è minore di $\frac{b}{2}$ e la differenza tra le coordinate y è maggiore di $\frac{h}{2}$

4. la differenza tra le coordinate x è maggiore di $\frac{b}{2}$ e la differenza tra le coordinate y è maggiore di $\frac{h}{2}$

Esercizio 3.5.26 *Verificate la precedente affermazione*

Rispettivamente ai casi precedenti la distanza su toro sarà la:

1. distanza euclidea dei rappresentanti dei due punti nello stesso rettangolo

2. distanza euclidea dei rappresentanti dei due punti in rettangoli adiacenti rispetto al bordo verticale

3. distanza euclidea dei rappresentanti dei due punti in rettangoli adiacenti rispetto al bordo orizzontale

4. distanza euclidea dei rappresentanti dei due punti in rettangoli adiacenti rispetto al vertici opposti

Esercizio 3.5.27 *Verificate la precedente affermazione*

Distanza e coordinate intrinseche

Consideriamo ora lo spazio T definito da un toro come superficie di rotazione di una circonferenza attorno a un'altra circonferenza.

Sappiamo che un punto sul toro è completamente determinato da due coordinate (ϕ, ψ). Le dimensioni del toro sono date dalla lunghezza delle due circonferenze, quindi avremo $2\pi a$ e $2\pi c$.

Esercizio 3.5.28 *Calcolate le dimensioni del toro per* $a = 2$ $c = 10$

Supponiamo che la lunghezza della curva Γ sia 10, e la lunghezza della curva γ sia 3.

Esercizio 3.5.29 *Verificare che (come superficie in* $\mathbb{R}^3$*) i punti sul toro sono descritti dalle coordinate*

$$\begin{aligned} x &= (10 + 3\cos\phi)\cos\psi \\ y &= (10 + 3\cos\phi)\sin\psi \\ z &= 3\sin\phi \end{aligned}$$

Esercizio 3.5.30 *Verificare che la curva descritta da* $\psi =$ *costante è una copia della curva* γ.

Esercizio 3.5.31 *Verificare che la curva descritta da* $\phi =$ *costante descrive una circonfernza attorno alla retta* r.

Per calcolare la distanza tra due punti sul toro descritti attraverso le coordinate (θ, ϕ) occorre, come già fatto per il cilindro utilizzare la lunghezza d'arco di circonferenza.

Esercizio 3.5.32 *Considerate un toro* T *di dimensioni* $10, 3$. *Sia* P *un punto su* T *di coordinate* $(\pi, \frac{\pi}{2})$.

(a) *Determinate un punto* P *su* $\mathbb{R}^2$ *la cui immagine nella relazione di equivalenza che definisce* T *corrisponde a* P.

(b) *Determinate tutti i punti* P_n *le cui immagini nella relazione di equivalenza che definisce il toro* T *corrispondono a* P.

(c) *Siano* $P = (\pi, \frac{\pi}{2})$ *e* $Q = (\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$. *Calcolate la distanza su* T *tra* P *e*Q.

(d) *Siano* $P = (\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{2})$ *e* $Q = (\frac{11\pi}{6}, -\frac{\pi}{2})$. *Calcolate la distanza su* T *tra* P *e*Q.

Suggerimento: Ricordate che la distanza sul toro è data dalla lunghezza minima tra i due segmenti che uniscono su $\mathbb{R}^2$ i punti (un segmento è interno ad un rettangolo, l'altro attraversa la retta verticale di incollamento).

3.5.5 Intersezione di rette sul toro

Esercizio 3.5.33 *Disegnate sul toro le curve che corrispondono a*

1. *le rette verticali*
2. *le rette orizzontali*
3. *le rette oblique.*

Esercizio 3.5.34 *Verificate che due rette sul toro*

1. *non si intersecano*
2. *si intersecano una volta*
3. *si intersecano infinite volte.*

E' una geometria localmente euclidea.

Esercizio 3.5.35 *Trovare le intersezioni (se esistono) su* T *delle curve* $\psi = \pi$ *e* $\phi = \frac{\pi}{2}$. *E su* $\mathbb{R}^2$.

3.5.6 Rette raziuonali e irrazionali

Consideriamo ora una retta sul toro di equazione $\phi = r\psi$. Note le dimensioni del toro a, c consideriamo il modello costruito utilizzando la relazione di equivalenza $x' = x + hm$ $y' = y + kn$ dove $n = 2\pi a$, $m = 2\pi c$ e $h, k \in \mathbb{Z}$. La retta, ora, ha equazione $y = sx$.

A Caso s razionale. Supponiamo che $s = \frac{p}{q}$ con $p, q, \in \mathbb{Z}$. Dall'equazione della retta sappiamo che passa per l'origine. Vogliamo dimostrare che dopo un certo numero di avvolgimenti attorno al toro la retta passa una seconda volta per questo punto. In altre parole è una curva chiusa.

Dobbiamo trovare un punto $(x', y') \sim (0, 0)$ sulla nostra retta, cioè tale che $y' = sx'$. Poiché $(x', y') \sim (0, 0)$ si ha $x' = h_o m$ e $y' = k_o n$, quindi dobbiamo trovare due valori $h_o, k_o \in \mathbb{Z}$ tali che $k_o n = sh_o m$, o, equivalentemente, $qk_o n = ph_o m$. E' chiaro che basta scegliere $h_o = qn$ e $k_o = pm$.

Esercizio 3.5.36 *Trovate almeno un altro punto* $(x'', y'') \sim (0, 0)$ *sulla retta* $x = sy$ *con* $s \in \mathbb{Q}$.

B Caso s irazionale. Supponiamo ora che $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, a esempio $s = \sqrt{2}$. Per prima cosa osserviamo che la curva $y = sx$ non è chiusa, cioè non passerà una seconda volta per il punto $(0, 0)$. Inoltre, e questo è il punto principale, la curva sul toro immagine della retta $y = sx$ è densa, cioè passa arbitrariamte vicino ad ogni punto sul toro.

Per dimostrare ciò utilizziamo il seguente risultato su i numeri irrazionali.

Lemma 3.5.1 *Siano* $a \in [0, m)$ *e* $b \in [0, n)$*, e sia* s *un numero irrazionale. Allora*

$$\inf_{h,k \in \mathbb{Z}} |b + hm - s(a + kn)| = 0$$

Utilizziamo questo Lemma per dimostrare che la curva $y = sx$ passa arbitrariamento vicina al punto (a, b). Scegliendo oppurtunamente h, k il traslato $(a + hm, b + kn)$ di (a, b) appare in ogni rettangolo della griglia che usiamo per costruire il toro (tutti i punti sono identificati sul toro stesso). Dal lemma segue che comunque scelto $\varepsilon > 0$ esistono h_o, k_o tali che $|b + hm - s(a + kn)| < \varepsilon$ cioè i punti sulla curva sono arbitrariamente vicini a uno dei rappresentanti di (a, b).

Il Toro come modello fisico matematico

Un toro è dato non appena sono dati 2 vettori linearmente indipendenti e si stabilisce la relazione di equivalenza.

Prima osservazione: la relazione di equivalenza è transitiva (informazione *algebrica*), pertanto non solo sono equivalenti punti che vengono tasportati uno nell'altro da uno dei due vettori di traslazione, sono equivalenti anche quelli trasportati dalla somma dei due vettori. Ovvero: sono equivalenti i vertici opposti di un quadrato del reticolo piano.

Notiamo che a strutture algebriche corrispondono strutture visuali; quest'ultime le immaginiamo *guardando* oggetti geometrici, ma solo dopo essere passati per l'astrazione algebrica possiamo assumere per vere le strutture visuali che avevamo in prima istanza solo supposto.

Il modello spin-orbita.

La struttura geometrica del toro si presta a descrivere l'interazione di due grandezze periodiche. Capita spesso di dover confrontare questo tipo di fenomeni, ad esempio quando osserviamo e ascoltiamo due metronomi: è spontaneo concentrarsi sull'avvicinarsi o meno del loro "tic tac!" E' naturale cercare di trovare un ordine "temporale", ovvero la nostra mente si concentra sulla possibile struttura periodica dei ticchetii emessi dai due strumenti. La geometria del toro è, come dicevamo, ideale per descrivere due fenomeni periodici contemporaneamente e presenta il grande vantaggio di essere stata capita e distillata ormai da molto tempo fino ad arrivare alla disarmante semplicitá di un rettangolo sul piano!

Il fenomeno che vogliamo descrivere è la rotazione dei pianeti, detto anche *modello spin/orbita*. Consideriamo il sistema Terra-Luna: mettiamo la Terra nell'origine del sistema di riferimento, quindi ferma, la Luna gira intorno a sé stessa (spin) e attorno alla Terra (orbita). La posizione della Luna sull'orbita intorno alla Terra, che assimiliamo ad un cerchio, è determinata da un angolo φ; l'angolo di spin, ovvero di rivoluzione della Luna su sé stessa lo chiameremo ψ. Entrambi gli angoli sono grandezze periodiche, di periodo 2π, quindi la traiettoria $(\varphi(t), \psi(t))$ puó essere disegnata sul toro, su una qualunque delle varie rappresentazioni che conosciamo. La Luna, come sappiamo bene, volge sempre la stessa faccia verso la terra, pertanto il tempo impiegato a fare un giro su sé stessa è lo stesso che impiega a fare un giro attorno alla Terra. Quindi il rapporto ta i due periodi è 1!! La traiettoria rappresentata sul toro visto come rettangolo è una retta con pendenza 1, quindi una curva chiusa sul toro.

Passiamo ad osservare il sistema Terra Sole. Stavolta mettiamo Sole nell'origine degli assi; la terra impiega 24 ore a fare una rivoluzione, $365 \cdot 24$ ore per fare una rotazione. Il rapporto è $\frac{24}{365 \cdot 24 + 6h - \ldots}$, la correzione di 6 ore fa sí che ogni 4 anni ci sia l'anno bisestile, ma ogni circa 100 anni si salterá l'anno bisestile, perché in realtá la correzione di 6 ore è troppo....!! Il rapporto tra i periodi non è razionale quindi! Molti sistemi spin-orbita del sistema solare presentano un rapporto razionale tra i periodi.

Come si derscive un'eclissi con questo modello? L'eclissi è un allineamento della Terra con Luna e Sole. Mettiamo ancora il Sole nell'origine degli assi, sia φ l'angolo che identifica la posizione della Terra rispetto al Sole, e ψ l'angolo che determina la posizione della Luna in rotazione attorno alla Terra. Supponiamo che la Terra e la Luna si muovano con moto circolare uniforme, con velocitá angolari rispettivamente ω_1 e ω_2; le equazioni del moto sono $\varphi = \varphi_0 + \omega_1 t$, $\psi = \psi_0 + \omega_2 t$. Nel Toro $2\pi \times 2\pi$ di variabili φ, ψ le posizioni di Terra e Luna sono all'istante t un punto di coordinate $(\varphi(t), \psi(t))$.

Theorem 0.1 *Se all'istante t_0 si verifica un'eclissi, esiste un altro istante $t_1 > t_0$ in cui si verificherá un'altra eclissi.*

Come si dimostra? analizziamo le varie possibilitá:

(i) $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ è razionale. Allora $(\varphi(t), \psi(t))$ è una retta a pendenza razionale, pertanto ripassa per il punto di partenza, quindi t_1 è un punto equivalente a t_0 e il passaggio della retta identifica l'eclissi.

(ii) $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ è irrazionale. Allora la retta $(\varphi(t), \psi(t))$ passerá molto vicino al punto $(\varphi(t_0), \psi(t_0))$, quinsi si avrá comunque un'eclissi, di entitá diversa, ma il fenomeno si verificherá.