DUE FORMULAZIONI EQUIVALENTI PER IL PRODOTTO SCALARE

LAURA TEDESCHINI LALLI

Come sappiamo un vettore resta definito in modo equivalente o dalle sue coordinate, (nel caso sia in R^3, da una terna ordinata di numeri reali), oppure da modulo, direzione e verso. La seconda formulazione in genere facilita l'immaginazione corretta e la sua interpretazione geometrica; la prima certamente facilita il trattamento da parte di un computer, per esempio. Dunque rimane fondamentale conoscerle entrambe e saper praticare le loro equivalenze. Qua parliamo della sola equivalenza delle formulazioni per il prodotto scalare di due vettori.

0.1. **La legge dei coseni.** La legge dei coseni serve a discutere qualunque triangolo. Sembra una generalizzazione del Teorema di Pitagora, ma attenzione: non lo contiene come caso particolare, almeno finché, come faremo noi, ne dipende perché lo usiamo per dimostrarla. A noi serve, in particolare, per dimostrare l'equivalenza tra le due formulazioni del prodotto scalare tra vettori.

Legge dei coseni:

dato un triangolo ABC, chiamiamo a, b, c, rispettivamente, la misura dei lati opposti al vertice con la stessa lettera maiuscola. Allora si ha:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

dove con $\cos \hat{A}$ abbiamo indicato il coseno dell'angolo nel vertice A.

Dimostrazione:

Tracciamo il triangolo come in figura. Se tiriamo l'altezza h relativa ad uno dei lati adiacenti ad A, ad esempio AB, di lunghezza c, essa lo divide in due porzioni $c - x$ ed x. ossserviamo anche che, per definizione di coseno, abbiamo

$$x = b \cos \hat{A}$$

Per ciascuno dei due triangoli rettangoli che rimangono definiti, abbiamo, per il Teorema di Pitagora :

$$b^2 = h^2 + x^2$$
$$a^2 = h^2 + (c - x)^2$$

dalla prima abbiamo $h^2 = b^2 - x^2$ che possiamo sostituire nella seconda ottenendo:

$$a^2 = b^2 - x^2 + c^2 + x^2 - 2cx$$

e ricordando il valore di x abbiamo quello che cercavamo:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

0.2. **Prodotto scalare.** Dati due vettori $\mathbf{v_1} = (\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1, \mathrm{z}_1)$ e $\mathbf{v_2} = (\mathrm{x}_2, \mathrm{y}_2, \mathrm{z}_2)$ vogliamo dimostrare che

$$\mathbf{v_1}.\mathbf{v_2} := \mathrm{x}_1\mathrm{x}_2 + \mathrm{y}_1\mathrm{y}_2 + \mathrm{z}_1\mathrm{z}_2 = \|\mathbf{v_1}\|\|\mathbf{v_2}\|\cos\theta$$

con θ l'angolo compreso tra i due vettori $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$.

Applichiamo i due vettori in uno stesso punto; otteniamo cosí un triangolo con lati che misurano $\|\mathbf{v_1}\|, \|\mathbf{v_2}\|, \|\mathbf{v_2} - \mathbf{v_1}\|$. Evidentemente il lato di misura $\|\mathbf{v_2} - \mathbf{v_1}\|$ si trova opposto all'angolo θ. Per la legge dei coseni applicata a questo triangolo

$$\|\mathbf{v_2} - \mathbf{v_1}\|^{\mathbf{2}} = \|\mathbf{v_1}\|^{\mathbf{2}} + \|\mathbf{v_2}\|^{\mathbf{2}} - \mathbf{2}\|\mathbf{v_1}\|\|\mathbf{v_2}\|\cos\theta$$

.

Sviluppando questi moduli in coordinate, avremo rispettivamente:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v_1}\|^{\mathbf{2}} &= \mathrm{x}_1^2 + \mathrm{y}_1^2 + \mathrm{z}_1^2\\ \|\mathbf{v_2}\|^{\mathbf{2}} &= \mathrm{x}_2^2 + \mathrm{y}_2^2 + \mathrm{z}_2^2\\ \|\mathbf{v_2} - \mathbf{v_1}\|^{\mathbf{2}} &= (\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_2)^2 + (\mathrm{y}_1 - \mathrm{y}_2)^2 + (\mathrm{z}_1 - \mathrm{z}_2)^2 =\\ &= x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - 2x_1x_2 - 2y_1y_2 - 2z_1z_2\end{aligned}$$

ed allo stesso tempo:

$$\|\mathbf{v_2} - \mathbf{v_1}\|^{\mathbf{2}} = \mathrm{x}_1^2 + \mathrm{y}_1^2 + \mathrm{z}_1^2 + \mathrm{x}_2^2 + \mathrm{y}_2^2 + \mathrm{z}_2^2 - 2\|\mathbf{v_1}\|\|\mathbf{v_2}\|\cos\theta$$

da cui segue che

$$\|\mathbf{v_1}\|\|\mathbf{v_2}\|\cos\theta = \mathrm{x}_1\mathrm{x}_2 + \mathrm{y}_1\mathrm{y}_2 + \mathrm{z}_1\mathrm{z}_2$$

.

come si voleva dimostrare.

Questo ci mette in grado, in particolare, conoscendo le coordinate di due vettori, di calcolare l'angolo tra essi compreso, e viceversa.