

## DUE RETTE POTREBBERO PURE ESSERE SGHEMBE.....

Vogliamo investigare quali sono le possibili posizioni reciproche in cui si possono trovare due rette nello spazio  $\mathbb{R}^3$ .

Nel piano  $\mathbb{R}^2$  due rette possono essere parallele o incidenti, non c'è una terza configurazione. Nello spazio ha senso porsi il problema, perché essendoci *spazio* possono accadere (e accadono) cose piuttosto interessanti.

Cominciamo con il capire questa affermazione: due rette nello spazio tridimensionale o sono complanari o non lo sono. Cioè questa condizione è esclusiva. Complanarità significa appartenenza allo stesso piano. Le rette parallele lo sono, così come le rette incidenti (provare per credere usando due penne o due bastoncini...).

Quindi l'insieme delle rette complanari raggruppa sia le incidenti che le parallele. Ora rimane da capire quali coppie di rette sono rimaste fuori...! Da qui il significato del titolo:

C'E' UNA GRANDE NOTIZIA, LE RETTE POSSONO ESSERE SGHEMBE!

La definizione di coppia di rette sghembe è *rette non complanari*.

Rimane anche da capire come si procede analiticamente per stabilire se due rette sono sghembe, parallele o incidenti, a partire dalle loro equazioni.

Parentesi: come visualizzare due rette sghembe: siete in una stanza, osservate gli spigoli (linee di intersezione tra due pareti). Uno spigolo verticale è sghembo rispetto a uno orizzontale che non appartiene alla stessa parete.

Lo strumento che useremo è il *prodotto misto* tra vettori.

Dati tre vettori  $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}$  il loro prodotto misto o prodotto triplo è lo scalare dato da:

$$\mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \wedge \mathbf{u})$$

dove con "." indichiamo il prodotto scalare e con " $\wedge$ " il prodotto vettoriale.

E' noto che il *modulo* del prodotto vettoriale  $\mathbf{w} \wedge \mathbf{u}$  è pari all'area del parallelogramma generato dai due vettori  $\mathbf{w}, \mathbf{u}$ .

Inoltre se chiamiamo con  $\mathbf{z}$  la risultante del prodotto vettoriale, il prodotto scalare

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{z} = |\mathbf{v}| |\mathbf{z}| \cos \theta$$

dove  $\theta$  è l'angolo tra il vettore  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{z}$ , non è altro che il volume del parallelepipedo generato dai tre vettori iniziali.

Infatti  $|\mathbf{z}|$  = area della base,  $|\mathbf{v}| \cos \theta$  è la misura dell'altezza di questo parallelepipedo. Quindi il prodotto è proprio il volume.

Come si collega questo prodotto con le rette sghembe? Deve essere chiaro prima di tutto qual'è l'informazione geometrica che ci da' il prodotto misto: dati tre vettori, se il loro prodotto misto non è zero, allora questi tre vettori *generano* un volume. D'altra parte se viene zero, capiamo che i tre vettori sono complanari, non racchiudono alcun volume. Consideriamo due rette scritte in forma parametrica.

$$r : \begin{cases} x(t) = x_0 + lt \\ y(t) = y_0 + mt \\ z(t) = z_0 + nt \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = x_1 + l't \\ y = y_1 + m't \\ z = z_1 + l't \end{cases}$$

Sia ora  $P_r P_s$  il vettore direzione che unisce due punti qualunque delle due rette, consideriamo i seguenti tre vettori:

$$\mathbf{v} = (l, m, n), \quad \mathbf{w} = (l', m', n'), \quad \mathbf{u} = P_r P_s$$

Le rette  $r$  ed  $s$  sono sghembe SE E SOLO SE il prodotto misto  $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \wedge \mathbf{u})$  è diverso da zero.

Solo se tale prodotto è diverso da zero le tre rette occupano davvero lo spazio tridimensionale. In caso contrario sono complanari. D'altra parte se due rette risultano essere complanari, potrebbero essere parallele o incidenti. E una di queste due condizioni esclude l'altra, pertanto è sufficiente verificarne una. La più immediata è il parallelismo, che si verifica controllando se i coefficienti dei vettori direttori delle due rette sono proporzionali.

**Esempio** Date le tre rette di equazione

$$r : \begin{cases} x = -2 + 5t \\ y = 3 + t \\ z = 4 - t \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = -t \\ y = -1 + t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \quad q : \begin{cases} x = 6 + 3t \\ y = 1 - 3t \\ z = -3 - 6t, \end{cases}$$

stabilire quali coppie sono incidenti, quali parallele e quali sghembe.

Per stabilire se le rette  $r$  ed  $s$  sono complanari o meno componiamo la matrice del prodotto misto:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

il determinante è  $-36$  pertanto le rette sono sghembe.

Procedendo nello stesso modo con la coppia  $r$  e  $q$ , si verifica che il determinante viene zero. Quindi le rette sono complanari. Poiché i coefficienti dei vettori direttori NON sono proporzionali, le rette non saranno parallele ma incidenti.

Infine per l'ultima coppia: è abbastanza facile verificare (si vede!) che i coefficienti dei vettori direzione sono proporzionali:

$$-3(-1, 1, 2) = (3, -3, -6).$$

Volendo invece procedere come per le altre due coppie, la matrice avrà un determinante nullo e poi guardando i coefficienti direttori ci si dovrà accorgere che sono proporzionali.