IL TRIEDRO E LE FORMULE DI FRENET

NOTE PER IL CORSO DI GE310, DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E FISICA, UNIVERSITÀ ROMA TRE

VALERIO TALAMANCA

In questa breve nota enunciamo e dimostriamo le formule Frenet per una curva regolare e la loro applicazione al calcolo di curvatura, torsione e triedro di Frenet per una curva regolare tramite il programma Mathematica.

Sia $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}$, una curva regolare, i versori tangente, normale e binormale sono definiti come segue

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$$
$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}$$
$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$$

Dove $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ indica il prodotto vettoriale tra $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$. Spesso nel prosieguo useremo $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$ e $\mathbf{B}$ invece di $\mathbf{T}(t)$, $\mathbf{N}(t)$ e $\mathbf{B}(t)$. Poichè vettori a norma costante sono perpendicolari alla propria derivata abbiamo che $\mathbf{T}, \mathbf{N}$ e $\mathbf{B}$ costiuiscono una terna di vettori perpendicolari orientati come la base standard di $\mathbb{R}^3$ e vengono chiamati il *triedro (mobile) di Frenet*. La funzione

$$\mathrm{c}(t) = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\gamma'(t)\|}$$

è detta la *curvatura* di γ.

Esempio 1. Calcoliamo la curvatura di una circonferenza piana; sia

$$\begin{aligned} \gamma : (a, b) &\to \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto (R\cos t,\, R\sin t,\, 0) \end{aligned}$$

dove $R > 0$. Allora

$$\gamma'(t) = (-R\sin t,\, R\cos t,\, 0), \qquad \mathbf{T} = (-\sin t,\, \cos t,\, 0), \qquad \mathbf{T}' = (-\cos t,\, -\sin t,\, 0)$$

e quindi

$$\frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\gamma'(t)\|} = \frac{\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}}{\sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t}} = \frac{1}{R}.$$

Esempio 2. Calcoliamo la curvatura di un elica:

$$\begin{aligned} \gamma : (a, b) &\to \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto (R\cos t,\, R\sin t,\, at) \end{aligned}$$

dove $R > 0$ e $a > 0$. Allora

$$\gamma'(t) = (-R\sin t,\, R\cos t,\, a), \qquad \mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{R^2+a^2}}(-R\sin t,\, R\cos t,\, a), \qquad \mathbf{T}' = \frac{1}{\sqrt{R^2+a^2}}(-R\cos t,\, -R\sin t,\, 0)$$

e quindi

$$\frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\gamma'(t)\|} = \frac{\left(\frac{\sqrt{R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t}}{\sqrt{R^2+a^2}}\right)}{\sqrt{R^2+a^2}} = \frac{\sqrt{R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t}}{\sqrt{R^2+a^2}\sqrt{R^2+a^2}} = \frac{R}{R^2+a^2}$$

In generale la curvatura di una curva non è costante, anche nel caso di curve con equazione molto semplice, come possiamo vedere nei prossimi due esempi.

Esempio 3. Consideriamo una ellissi piana:

$$\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^3$$
$$t \mapsto (a \cos t,\, b \sin t,\, 0)$$

dove $a \neq b$. Allora

$$\gamma'(t) = (-a \sin t,\, b \cos t,\, 0), \qquad \mathbf{T} = \left(\frac{-a \sin t}{\sqrt{a \sin^2 t + b \cos^2 t}}, \frac{b \cos t}{\sqrt{a \sin^2 t + b \cos^2 t}}, 0 \right)$$

$$\mathbf{T}' = \left(-\frac{ab^2 \sin t}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}, -\frac{a^2 b \cos t}{(a^2 \sin^2 t + b \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}, 0 \right) \qquad \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\gamma'(t)\|} = \frac{|ab|}{(a^2 \sin^2 t + b \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}$$

Il prossimo teorema determina le componenti di $\mathbf{T}'$, $\mathbf{N}'$ e $\mathbf{B}'$ rispetto $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$ e $\mathbf{B}$.

Teorema 1. *(Formula di Frenet) Sia $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^3$, una curva regolare, allora*

(a) $\mathbf{T}'(t) = \|\gamma'(t)\|\, \mathrm{c}(t)\mathbf{N}(t)$
(b) $\mathbf{N}'(t) = -\|\gamma'(t)\|\, \mathrm{c}(t)\mathbf{T}(t) + \|\gamma'(t)\|\tau(t)\mathbf{B}(t)$
(c) $\mathbf{B}'(t) = -\|\gamma'(t)\|\tau(t)\mathbf{N}(t)$

Per dimostrare (a) basta notare mettere insieme la definizione di $\mathbf{N}(t)$ e quella di $\mathrm{c}(t)$.

Per dimostrare (c) notiamo che poichè $\mathbf{B} \cdot \mathbf{T} = 0$ si ha

$$0 = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{T})' = \mathbf{B}' \cdot \mathbf{T} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{T}'.$$

D'altro canto $\mathbf{T}'$ è proporzionale a $\mathbf{N}$ che è perpendicolare a $\mathbf{B}$ per definizione. Quindi $\mathbf{B}' \cdot \mathbf{T} = 0$ cioè $\mathbf{B}'$ è perpendicolare sia a $\mathbf{B}$ che ha $\mathbf{T}$. Ne segue che $\mathbf{B}'$ risulta proporzionale a $\mathbf{N}$ e ponendo

$$\tau(t) = -\frac{\|\mathbf{B}'(t)\|}{\|\gamma'(t)\|}$$

si ottiene c). Per dimostrare b) notiamo che $\mathbf{N}'$ è perpendicolare a $\mathbf{N}$ e quindi dobbiamo solo calcolare le sue componenti lungo $\mathbf{T}(t)$ e $\mathbf{B}(t)$. Ora $\mathbf{N} \cdot \mathbf{T} = 0$ e quindi $0 = \mathbf{N}' \cdot \mathbf{T} + \mathbf{N} \cdot \mathbf{T}'$. Da cui si ottiene

$$\mathbf{N}' \cdot \mathbf{T} = -\mathbf{N} \cdot \mathbf{T}' = -\mathbf{N} \cdot \mathrm{c}(t)\|\gamma'(t)\|\mathbf{N} = -\|\gamma'(t)\|\, \mathrm{c}(t)$$

Similmente $\mathbf{N} \cdot \mathbf{B} = 0$ e quindi

$$\mathbf{N}' \cdot \mathbf{B} = -\mathbf{N} \cdot \mathbf{B}' = -\mathbf{N} \cdot (-\|\gamma'(t)\|\tau(t)\mathbf{N}) = \|\gamma'(t)\|\tau(t)$$

Il piano generato da $\mathbf{T}(t_0)$ e $\mathbf{N}(t_0)$ e contente il punto $\gamma(t_0)$ è detto il piano osculatore alla curva γ nel punto $\gamma(t_0)$. Se la curva è piana si verifica immediatamente che il piano osculatore è costante e coincide con il piano contenente la curva. La funzione $\tau = \tau(t)$ è detta la *torsione* di γ e misura la variazione del piano osculatore, visto che il versore binormale individua la direzione ortogonale al piano osculatore.

Passiamo ora alle applicazioni delle formule di Frenet: vogliamo ottenere delle formule che usino solo γ e le sue derivate per calcolare il triedro di Frenèt, la curvatura e la torsione di una curva γ infatti tali formule sono più semplici da implementare in Mathematica,.

Iniziamo notando che versore tangente è già definito in termini di γ e γ'. Risulta più facile esprimere $\mathbf{B}$ nei termini voluti invece che $\mathbf{N}$. Il versore normale verrà calcolato usando il fatto che è il prodotto vettoriale ta $\mathbf{B}$ e $\mathbf{T}$. Ora sappiamo che $\gamma'(t) = \|\gamma'(t)\|\mathbf{T}(t)$, e quindi si ha

$$\gamma''(t) = (\|\gamma'(t)\|)'\mathbf{T}(t) + \|\gamma'(t)\|\mathbf{T}'(t) = (\|\gamma'(t)\|)'\mathbf{T}(t) + \|\gamma'(t)\|^2\, \mathrm{c}(t)\mathbf{N}(t).$$

Da cui

$$\gamma'(t) \times \gamma''(t) = \gamma'(t) \times ((\|\gamma'(t)\|)'\mathbf{T}(t)) + \gamma'(t) \times \left(\|\gamma'(t)\|^2\, \mathrm{c}(t)\mathbf{N}(t)\right) = \|\gamma'(t)\|^2\, \mathrm{c}(t)\, (\gamma'(t) \times \mathbf{N}(t))$$

perchè $\gamma'(t)$ e $\mathbf{T}(t)$ sono paralleli. D'altro canto

$$\gamma'(t) \times \mathbf{N}(t) = \|\gamma'(t)\|\mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t) = \|\gamma'(t)\|\mathbf{B}(t).$$

Quindi

$$\gamma'(t) \times \gamma''(t) = \|\gamma'(t)\|^3\, \mathrm{c}(t)\mathbf{B}(t) \tag{1}$$

Poichè $\mathbf{B}$ ha norma 1 abbiamo che

$$\mathbf{B}(t) = \frac{\gamma'(t) \times \gamma''(t)}{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|}. \tag{2}$$

Per ottenere una formula per la curvatura basta prendere le norme in (1) ed esplicitare per $\mathrm{c}(t)$, ottenendo:

$$\mathrm{c}(t) = \frac{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3} \tag{3}$$

Per concludere vogliamo verificare che

$$\tau(t) = \frac{\gamma'(t) \times \gamma''(t) \cdot \gamma'''(t)}{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|^2} \tag{4}$$

Visto che $\gamma'(t) \times \gamma''(t)$ è proporzionale a $\mathbf{B}$ abbiamo che nel prodotto misto che appare in (4) l'unico contributo è quello della componente lungo $\mathbf{B}$ di $\gamma'''(t)$. Dunque si ha che

$$\gamma'''(t) = (\gamma''(t))' = \big((\|\gamma'(t)\|)'\mathbf{T}(t) + \|\gamma'(t)\|^2\,\mathrm{c}(t)\mathbf{N}(t)\big) = \|\gamma'(t)\|^2\,\mathrm{c}(t)\mathbf{N}'(t) + \text{termini perpendicolari a } \mathbf{B}(t)$$

usando b) si ottiene:

$$\gamma'''(t) = |\gamma'(t)\|^3\,\mathrm{c}(t)\tau(t)\mathbf{B}(t) + \text{termini perpendicolari a } \mathbf{B}(t).$$

Ne segue che

$$\gamma'(t) \times \gamma''(t) \cdot \gamma'''(t) = \|\gamma'(t)\|^6\,\mathrm{c}(t)^2\tau(t)$$

e quindi usando la (3) abbiamo che

$$\tau(t) = \frac{\gamma'(t) \times \gamma''(t) \cdot \gamma'''(t)}{\|\gamma'(t)\|^6\,\mathrm{c}(t)^2} = \frac{\gamma'(t) \times \gamma''(t) \cdot \gamma'''(t)}{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|^2}$$

Quindi abbiamo dimostrato la seguente

Proposizione 2. *Sia $\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^3$, una curva regolare, allora*

(a) $\mathrm{c}(t) = \dfrac{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}$

(b) $\tau(t) = \dfrac{\gamma'(t) \times \gamma''(t) \cdot \gamma'''(t)}{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|^2}$

Riprendiamo gli esempi dell'elica e dell'ellisse e calcoliamo il vettore binormale e la torsione.

Esempio 4. L'elica è data da

$$\begin{aligned} \gamma : (a,b) &\to \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto (R\cos t,\ R\sin t,\ at) \end{aligned}$$

dove $R > 0$ e $a > 0$. Sappiamo che

$$\gamma'(t) = (-R\sin t,\ R\cos t,\ a), \qquad \mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + a^2}}(-R\sin t,\ R\cos t,\ a) \qquad \mathbf{N} = (-\cos t, -\sin t, 0)$$

Calcoliamo la torsione

$$\gamma''(t) = (-R\cos t,\ -R\sin t,\ 0) \qquad \gamma'''(t) = (R\sin t, -R\cos t, 0)$$

Quindi

$$\gamma'(t) \times \gamma''(t) = \det\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -R\sin t & R\cos t & a \\ -R\cos t & -R\sin t & 0 \end{pmatrix} = (aR\sin t, -aR\cos t, R^2)$$

da cui otteniamo

$$\gamma'(t) \times \gamma''(t) \cdot \gamma'''(t) = aR^2 \qquad \|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|^2 = a^2R^2 + R^4$$

da cui

$$\tau(t) = \frac{a}{a^2 + R^2}$$

Esempio 5. Per quel che riguarda l'ellisse:

$$\begin{aligned} \gamma : (a,b) &\to \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto (a\cos t,\ b\sin t,\ 0) \end{aligned}$$

dove $a \neq b$. Sappiamo che

$$\gamma'(t) = (-a\sin t,\, b\cos t,\, 0) \qquad \gamma''(t) = (-a\cos t,\, -b\sin t,\, 0) \qquad \gamma'''(t) = (a\sin t,\, -b\cos t,\, 0).$$

Quindi

$$\gamma'(t) \times \gamma''(t) = (0,\, 0,\, ab)$$

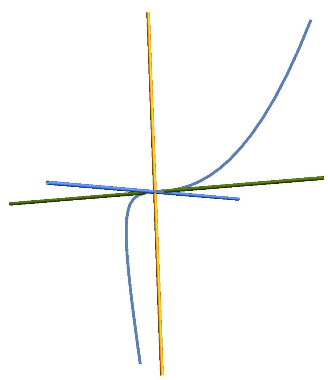
da cui $\gamma'(t) \times \gamma''(t) \cdot \gamma'''(t) = (0,\, 0,\, ab) \cdot (a\sin t,\, -b\cos t,\, 0) = 0$ e quindi $\tau(t) = 0$ come ci aspettavamo visto che è un ellisse piana.

Concludiamo con un esempio molto elementare ma al tempo stesso un po' piu' complicato dal punto di vista computazionale

Esempio 6. Consideriamo la cubica gobba

$$\begin{aligned} \gamma : (a, b) &\to \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto (t,\, t^2,\, t^3) \end{aligned}$$

Allora abbiamo:



$$\gamma'(t) = (1,\, 2t,\, 3t^2), \qquad \gamma''(t) = (0,\, 2,\, 6t); \qquad \gamma'''(t) = (0,\, 0,\, 6); \qquad \gamma'(t) \times \gamma''(t) = (6t^2,\, -6t,\, 2)$$

Da cui otteniamo che

$$c(t) = \frac{\sqrt{36t^4 + 36t^2 + 4}}{(1 + 4t^2 + 9t^4)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\sqrt{9t^4 + 9t^2 + 1}}{(9t^4 + 4t^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Per quel che riguarda la torsione abbiamo che

$$\gamma'(t) \times \gamma''(t) \cdot \gamma'''(t) = 12$$

e quindi

$$\tau(t) = \frac{12}{36t^4 + 36t^2 + 4} = \frac{3}{9t^4 + 9t^2 + 1}$$

Valerio Talamanca, Università degli Studi Roma Tre, Largo San Leonardo Murialdo 1, 00146 Roma, Italy