

NOME: _____ COGNOME: _____ MATRICOLA: _____

LEGGIMI: *Leggere tutti i problemi proposti e poi sceglierne SOLO DUE. Utilizzare il retro dei fogli per i conti, (non utilizzare altri fogli); riportare le risposte negli spazi indicati.*

PROBLEMA 1 (sfera)

Un punto P su una sfera può essere individuato da due coordinate angolari (ϕ, θ) ; la coordinata ϕ (o "latitudine") ha lo zero nel Polo Nord e varia nell'intervallo $[0, \pi]$, la coordinata θ (o "longitudine") varia nell'intervallo $[0, 2\pi]$.

i) Sulla sfera di raggio $R = 1$ è data la curva $\theta = 8\phi$ Tracciare uno schizzo.

ii) Un triangolo sferico ha un'area di 24 mq e ha angoli che misurano $\pi/3$, $\pi/2$, $\pi/4$; calcolare il raggio della sfera su cui giace e la misura della superficie di tale sfera.

ii) fare uno schizzo di questo triangolo sulla sfera, verosimile riguardo alle relative proporzioni.

PROBLEMA 2 (oscillazioni).

i) Mostrare che per qualunque scelta delle costanti $C, D \in \mathbf{R}$ la funzione $y(x) = C \sin x + D \cos x$ è soluzione dell'equazione differenziale

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -y(x)$$

ii) Trovare la soluzione del seguente problema di Cauchy a variabili separabili:

$$y \frac{dy}{dx} = 4x + 1, \quad y(0) = 2$$

iii) **definizione:** Una funzione $h(t)$ è "periodica" se e solo se esiste T tale che $h(t + T) = h(t)$, $\forall t$. T è detto allora "periodo".

Data la funzione $f(t) = \cos(2t) + \sin(t)$,

- Dimostrare che f è periodica e calcolarne il periodo, e la frequenza

- Definire cosa è la lunghezza d'onda della funzione $g(x, t) = \sin x \cos t$. Fare un grafico qualitativo e indicare a cosa corrisponde la lunghezza d'onda (ricordarsi di indicare le variabili, altrimenti non è un grafico).

iv) **Non più di dieci righe:**

Provate a rappresentare visivamente il paesaggio sonoro in cui vi trovate in questo momento. Fate uno schizzo di proposta. Ci sono suoni che è stato più difficile rappresentare? Come mai? fatene una descrizione verbale (Non più di dieci righe)

PROBLEMA 3 (tassellazioni, simmetrie, geometrie localmente euclidee) .

(i) Un "gruppo di simmetria" è un concetto algebrico, una "figura piana" è un concetto geometrico. Che cosa si intende per "gruppo di simmetria" di una figura piana? Dimostrare che è un gruppo algebrico.

(ii) Che cosa sono i "generatori" di un gruppo algebrico?

(iii) Studiare il gruppo di simmetria del motivo illustrato di seguito:



- Evidenziare in figura il dominio fondamentale. Ricordate di segnalare il ruolo di tutti i bordi del dominio: segnalare i centri di rotazione tra di loro non equivalenti; angoli di rotazione; gli assi di specchio; gli assi di glissoriflessione e di traslazione.

- Sapete indicare i generatori del gruppo algebrico?

(viii) Su un cilindro di passo 10 vi sono due punti di coordinate $P_1(3, 1)$, $P_2(9, -5)$

(a) calcolare la loro distanza sul cilindro;

(b) disegnare il segmento che misura questa distanza sul dominio fondamentale;

(c) scrivere l'equazione di due rette distinte passanti per entrambi i punti P_1 e P_2 , disegnare le due rette.

PROBLEMA 4 (poliedri).

(i) Quanto misura il lato di un icosaedro inscritto in una sfera di raggio $R = 1$?

(ii) Scrivere la formula di Eulero. Per quale insieme di solidi vale? Fare un esempio di solido per cui non vale.

(iii) Scrivere la definizione del numero che va sotto il nome di "sezione aurea", e discutere la sua rilevanza nello studio del pentagono regolare.