

# Esercitazione 1

A. Giarnetti

- **Esercizio 1.** Consideriamo sul piano  $\mathbb{R}^2$  due punti  $P = (1, -\sqrt{2})$  e  $Q = (2, 1)$ . Siano  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  i due vettori che congiungono rispettivamente l'origine con P e Q.
  - a) Calcolare il modulo dei due vettori.
  - b) Scrivere i vettori nella base  $i$  e  $j$ .
  - b) I due vettori sono versori? Perché? Nel caso in cui non siano versori trovare i due versori diretti nella direzione di  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$ .
  - c) Trovare il prodotto scalare tra i due vettori.
  - d) Calcolare l'angolo compreso tra i due vettori in gradi e radianti.
  - e) Calcolare la somma e la differenza tra i due vettori ( $\mathbf{v}-\mathbf{w}$ ). Rappresentare i vettori somma e differenza su un piano come vettori che collegano l'origine a due nuovi punti A e B. Quali sono le coordinate di A e B?
- **Esercizio 2.** Siano dati due vettori nella base canonica di  $\mathbb{R}^2$   $\mathbf{v}=\mathbf{a}(1,3)$  e  $\mathbf{w}=\mathbf{b}(2,-1)$ . Quali sono i valori delle costanti  $a$  e  $b$  (numeri reali) che rendono i due vettori  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  dei versori? Quale è l'angolo compreso tra i due vettori? Questo angolo dipende da  $a$  e da  $b$ ?
- **Esercizio 3.** Consideriamo 3 forze (la forza in fisica è proprio un vettore!) applicate all'origine degli assi:
  - **A** di modulo 100.0 N, diretta verso Nord-Est, inclinata di  $30.0^\circ$  rispetto all'asse delle  $x$  positive
  - **B** di modulo 80.0 N diretta verso Nord-Ovest, inclinata di  $30.0^\circ$  rispetto all'asse delle  $y$  positive
  - **C** di modulo 40.0 N, diretta verso Sud-Ovest, inclinata di  $53.0^\circ$  rispetto all'asse delle  $x$  negative.Calcolare modulo, verso e direzione della forza risultante.
- **Esercizio 4.** Siano dati i punti  $A=(-1,2)$  e  $B=(0,5)$ . Trovare l'equazione parametrica della retta  $r$  che passa per i due punti. Quale è l'equazione parametrica di una retta parallela a  $r$  che passa per il punto  $(0,0)$ ? Quale è invece l'equazione di una retta perpendicolare a  $r$  che passa per lo stesso punto?
- **Esercizio 5.** Considerare il vettore  $\mathbf{v}=(-1,3)$ . Quale è la retta  $s$  che ha come vettore direttore  $\mathbf{v}$  e che passa per il punto  $C=(1,7)$ ? Quale è il punto di intersezione tra questa retta e la retta  $r$  che passa per i punti  $A=(1,1)$  e  $B=(0,-1)$ ?

- **Esercizio 6.** Sia data una retta  $r$  di equazione parametrica  $(t+1, 1-6t)$ . Quale è il vettore direttore di questa retta? Si consideri il punto  $A$  della retta distante  $\sqrt{2}$  dall'origine che giace nel primo quadrante. Quali sono i due punti  $B$  e  $C$  appartenenti alla retta che distano 3 dal punto  $A$ ?
- **Esercizio 7.** Si considerino i tre punti  $A = (1, \sqrt{2})$ ,  $B = (2, -3)$  e  $C = (-5, -1/2)$ . Trovare l'equazione parametrica della retta passante per  $A$  e  $B$ . Inoltre, dato il vettore  $\mathbf{v} = (-2, 1)$ , trovare l'equazione della retta avente come vettore direttore  $\mathbf{v}$  e passante per  $C$ . Quale è la posizione reciproca delle due rette?
- **Esercizio 8.** Data la retta di equazione parametrica  $(3/2-t, 1+2t)$ , trovare i punti  $A$  e  $B$  di intersezione della retta con gli assi  $x$  e  $y$ .
  - a) Calcolare area e perimetro del triangolo  $OAB$
  - b) Trasformare il triangolo in un nuovo triangolo  $T'$  mediante la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Quali sono i nuovi vertici del triangolo?

- c) Calcolare area e perimetro del triangolo trasformato.
  - d) Quale è la relazione tra l'area del triangolo iniziale e quella del triangolo trasformato?
- **Esercizio 9.** Sia dato il quadrilatero di vertici  $A=(1,1)$ ,  $B=(3,-3)$ ,  $C=(-1,-1)$  e  $D(-3,3)$ . Quale è la sua area? Trasformare la figura mediante la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Quale è l'area della nuova figura?

- **Esercizio 10.** Su un piano  $\mathbb{R}^2$ :
  - a) Trovare le equazioni parametriche della retta passante per i due punti  $A=(5,0)$  e  $B=(0,2)$ .
  - b) Calcolare la lunghezza del segmento  $OM$  che congiunge l'origine con il punto medio  $M$  del segmento  $AB$ .
  - c) Quale è il rapporto tra le aree dei due triangoli  $AOM$  e  $BOM$ ?
  - d) Che angolo forma il segmento  $OM$  con l'asse delle  $x$ ?
- **Esercizio 11.** Sia dato il punto  $Q=(2,3)$ . Che angolo forma il vettore  $\mathbf{v}$  che congiunge l'origine a  $Q$  con l'asse  $y$ ? Trasformare adesso il vettore  $\mathbf{v}$  mediante la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Quale è l'angolo che forma il vettore trasformato con l'asse  $y$ ? Dedurre dai risultati appena ottenuti di che angolo è stato ruotato il vettore dalla matrice  $M$ .

- **Esercizio 12.** Consideriamo i due punti  $A=(1,2)$  e  $B=(3,1)$ .
  - a) Trovare l'equazione della retta  $r$  che passa per  $A$  e per  $B$
  - b) Trovare l'equazione della retta perpendicolare ad  $r$  che passa per il punto medio  $M$  del segmento  $AB$ .
  - c) Trovare il punto  $P$  di intersezione di questa retta con l'asse delle  $y$ .
  - d) Trovare gli angoli interni del triangolo  $AMP$  e calcolarne l'area.