

Esercitazione del 29-10-2020

1) Dati i vettori $\vec{v}(3, 4)$ e $\vec{w}(1, 3)$ determinare e disegnare nel piano cartesiano:

$$\vec{s} = \vec{v} + \vec{w}$$

$$\vec{d} = \vec{v} - \vec{w}$$

$$\vec{p} = \vec{w} - \vec{v}$$

\hat{v} versore unitario di direzione e verso \vec{v}

2) Dati i tre vettori $\vec{v}(3, 2)$, $\vec{w}(2, 5)$ e $\vec{u}(-3, -3)$ determinare e disegnare nel piano:

$$\vec{s} = \vec{v} + \vec{w} + \vec{u}$$

$$\vec{d} = \vec{v} + \vec{w} - \vec{u}$$

$$\vec{p} = a\vec{v} - \vec{w} + b\vec{u} \text{ con } a=\frac{1}{2} \text{ e } b=\frac{1}{3}$$

3) Dati i punti $A := (2, 2)$ e $B := (4, 6)$

Disegnare sul piano il vettore \vec{AB} .

Scrivere e disegnare \vec{AB} nella forma $\vec{v} = a\hat{i} + b\hat{j}$ dove \vec{v} ha stesso verso, direzione e modulo di \vec{v} (i.e. \vec{AB} e \vec{v} sono equipollenti).

4) Dati i vettori $\vec{v} = \sqrt{3}\hat{i} + \hat{j}$ e $\vec{w} = \frac{1}{2}\hat{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{j}$

Determinare in forma parametrica e cartesiana le rette r e s passanti per $O = (0, 0)$ con direzioni rispettivamente \vec{v} e \vec{w} .

Determinarne la posizione reciproca (i.e. determinare l'angolo sotteso tra r e s)

5) Dati i punti $A := (-1, 1)$, $B := (1, 2)$ e $C := (3, -2)$

Scrivere in forma parametrica e cartesiana le rette r e s passanti rispettivamente per A, B e per B, C .

Determinarne la posizione reciproca.

6) Dati i punti $A := (-1, 1)$, $B := (1, 2)$, $C := (3, -2)$ e il vettore $\vec{v} = \frac{1+2\sqrt{3}}{5}\hat{i} - \frac{2-\sqrt{3}}{5}\hat{j}$

Scrivere in forma parametrica e cartesiana la retta r passante per A e B .

Scrivere in forma parametrica e cartesiana la retta s passante per C e ortogonale a r .

Scrivere in forma parametrica la retta p passante per C e parallela a \vec{v} .

Determinare la posizione reciproca tra s e p .

7) Dato il vettore $\vec{v} = 3\hat{i} - 2\hat{j}$

Scrivere l'equazione cartesiana di t_v traslazione nel piano operata attraverso il vettore \vec{v}

Determinare i punti corrispondenti secondo t_v di $O = (0, 0)$, $A = (2, 1)$, $B = (\frac{1}{2}, \frac{-3}{2})$ e disegnarli

8) Dati i punti $A = (1, 0)$, $B = (2, 1)$, $C = (3, 4)$, $D = (2, 3)$ e la matrice $M := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Disegnare il quadrilatero $ABCD$ nel piano

Dire, dimostrandolo, che tipo di figura geometrica è il quadrilatero $ABCD$

Calcolare i vertici trasformati A', B', C', D'

Calcolare il Determinante di M .

Calcolare l'area di $A'B'C'D'$

9)Dati i punti $A = (-1, -1), B = (2, 1), C = (0, 2)$

Disegnare il triangolo $\triangle ABC$ nel piano

Scrivere la matrice di rotazione R di centro $O = (0, 0)$ e angolo $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

Determinare i punti A', B', C' trasformati da R .

Calcolare l'area del triangolo $A'B'C'$.

10) Data la retta s con equazione cartesiana $y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$

Determinare la retta r passante per il centro $O = (0, 0)$ ed inclinazione $\frac{\pi}{6}$

Determinare M matrice di simmetria assiale rispetto a r

Dimostrare che M è una trasformazione lineare

Determinare s' mediante la riflessione

11) Sia $\lambda = \sqrt{3}$ e siano $A = (-1, 1), B = (-1, 0), C = (\frac{3}{2}, 0)$ punti del piano \mathbb{R}^2

Determinare la matrice M che rappresenta l'omotetia nel piano di coefficiente $\lambda = \sqrt{3}$ e centro $O = (0, 0)$

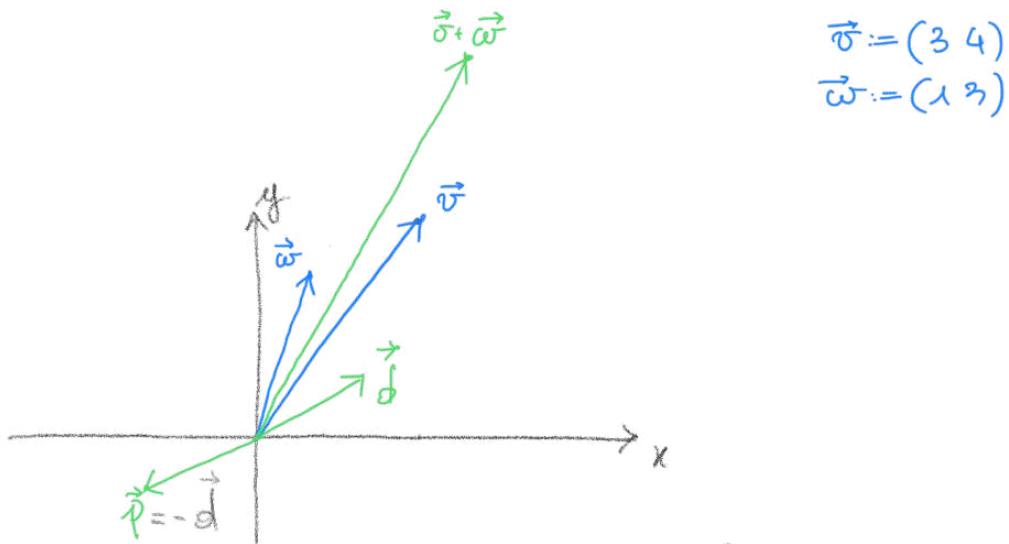
Dimostrare che M è effettivamente una trasformazione lineare

Determinare i vertici trasformati del triangolo dato $\triangle ABC$

Calcolare l'area del triangolo ottenuto $A'B'C'$

ESERCIZIO (1)

- Dobbiamo trovare come prima cosa i vettori dati (in blu)



- Calcoliamo i vettori incogniti utilizzando le forme di "vettori colonne" e procedendo per componenti:

$$\rightarrow \vec{s} = \vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+1 \\ 4+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\vec{d} = \vec{v} - \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{p} = \vec{w} - \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3 \\ 3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

[NB: $\vec{p} = -\vec{d}$]

[NB: de disegnare sul piano]

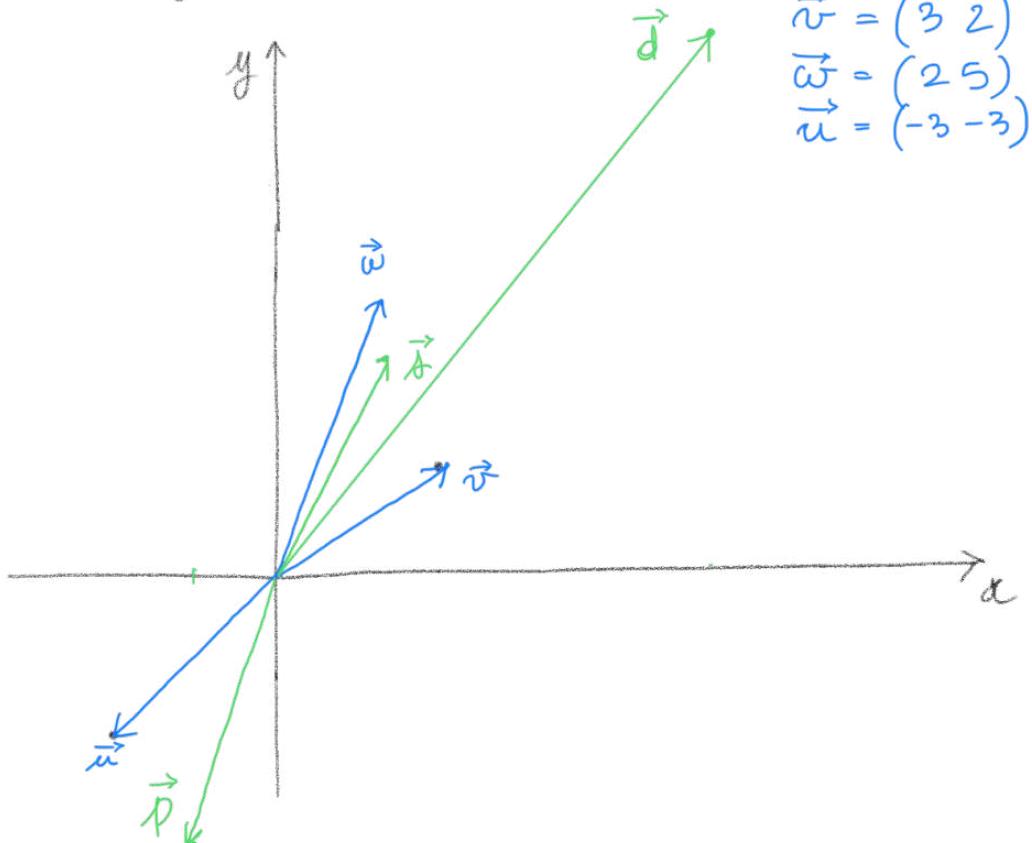
- \hat{v} è il versore di \vec{v} ossia stesso verso, direzione ma modulo unitario:

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{25}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

ESERCIZIO 2

-) Disegniamo i vettori dati (in blu)



-) Calcoliamo le combinazioni richieste:

$$\vec{P} = \vec{v} + \vec{w} + \vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 3+2-3 \\ 2+5-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{d} = \vec{v} + \vec{w} - \vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 3+2+3 \\ 2+5+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\vec{P} = \frac{1}{2}\vec{v} - \vec{w} + \frac{1}{3}\vec{u} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix} =$$

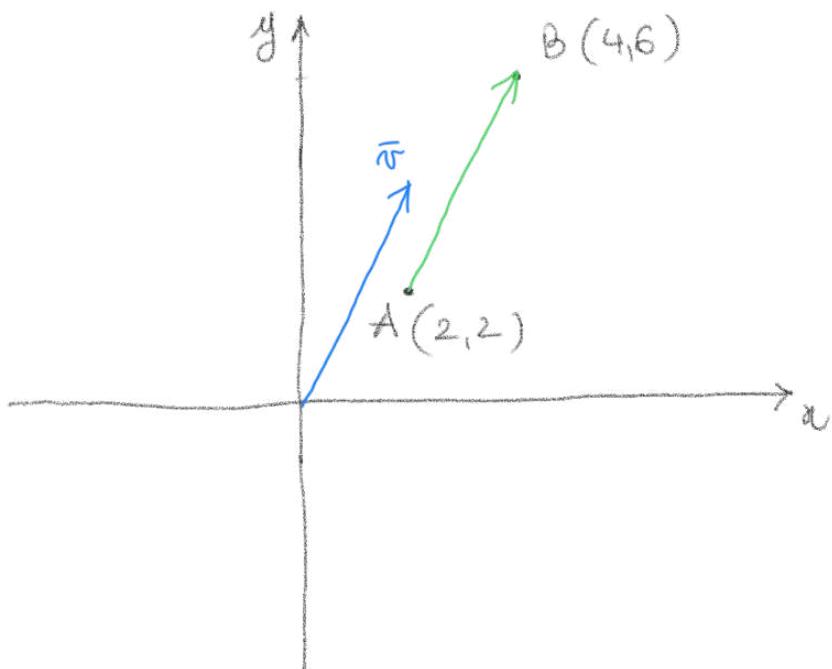
$$\vec{v} = (3 \ 2) \\ \vec{w} = (2 \ 5) \\ \vec{u} = (-3 \ -3)$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 - 2 - 1 \\ 1 - 5 - 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 3-4-2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 \\ -5 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

[NB.: Disegnate i risultati] ■

ESERCIZIO (3)

-) Disegniamo \vec{AB} come vettore (in verde)



-) Matematicamente \vec{AB} si definisce vettore
- o segue:

$$\vec{AB} = B - A = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-2 \\ 6-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \vec{v}$$

[NB.: \vec{v} ha stesso modulo, stesso verso, stessa direzione di \vec{AB} . Solo il punto di applicazione è diverso: \vec{v} è il rappresentante della classe di EQUIPOLLENZA a cui appartiene \vec{AB} .]

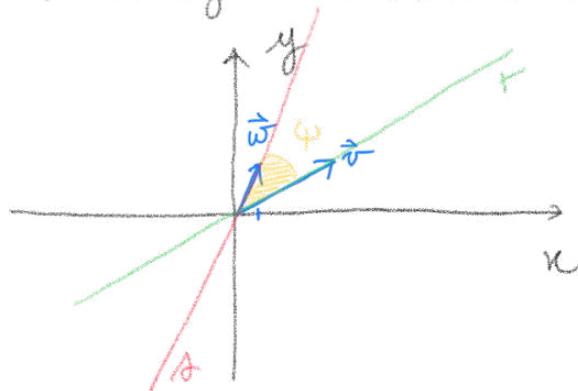
$\Rightarrow \vec{AB}$ si scrive in forma lineare colut:

$$\vec{AB} = \vec{v_x} \hat{i} + \vec{v_y} \hat{j} = 2\hat{i} + 4\hat{j}$$

con \hat{i} e \hat{j} versori ortonormali della base canonica di \mathbb{R}^2 .

Esercizio 4

-) disegniamo i vettori dati (IN BLW)



$$\begin{aligned}\vec{v} &= \sqrt{3}\hat{i} + \hat{j} \\ \vec{w} &= \frac{1}{2}\hat{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{j} \\ \Rightarrow \vec{v} &= (\sqrt{3}, 1) \\ \vec{w} &= \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\end{aligned}$$

-) le forme parametriche di una retta P passante per un punto $P = (x_p, y_p)$ e vettore direttore $\vec{P} = (P_x, P_y)$ si scrive come segue:

$$P = \begin{cases} x = x_p + P_x t \\ y = y_p + P_y t \end{cases}$$

nel nostro caso $P = O = (0, 0)$ quindi abbiamo:

$$t = \begin{cases} x = \sqrt{3}t \\ y = t \end{cases} \quad s = \begin{cases} x = \frac{1}{2}t \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$$

[NB.: Disegnare t e s]

isolando le t in funzione delle altre variabili otteniamo le forme cartesiane (i.e. $y = mx + q$):

$$t := \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{\sqrt{3}}{3}x \\ y = t \end{array} \right\} \quad s := \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{\sqrt{3}}{2}x \\ y = \frac{1}{2}t \end{array} \right\}$$

-) per determinare la posizione di r e s nel piano calcolo l'angolo sotteso tra le due rette che risulta il medesimo sotteso dai vettori direttori \vec{v} e $\vec{\omega}$. per farlo uso la relazione fondamentale relativa al prodotto scalare di due vettori:

$$\vec{v} \cdot \vec{\omega} = |\vec{v}| \cdot |\vec{\omega}| \cdot \cos \varphi$$

con φ angolo sotteso dai vettori \vec{v} e $\vec{\omega}$

nel nostro caso abbiamo:

$$i) |\vec{v}| = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

$$ii) |\vec{\omega}| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

$$iii) \vec{v} \cdot \vec{\omega} = v_x \omega_x + v_y \omega_y$$

$$\Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{\omega} = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

formule fondamentali
del prodotto scalare nel
piano

mentre (i) (ii) e (iii) ottengo

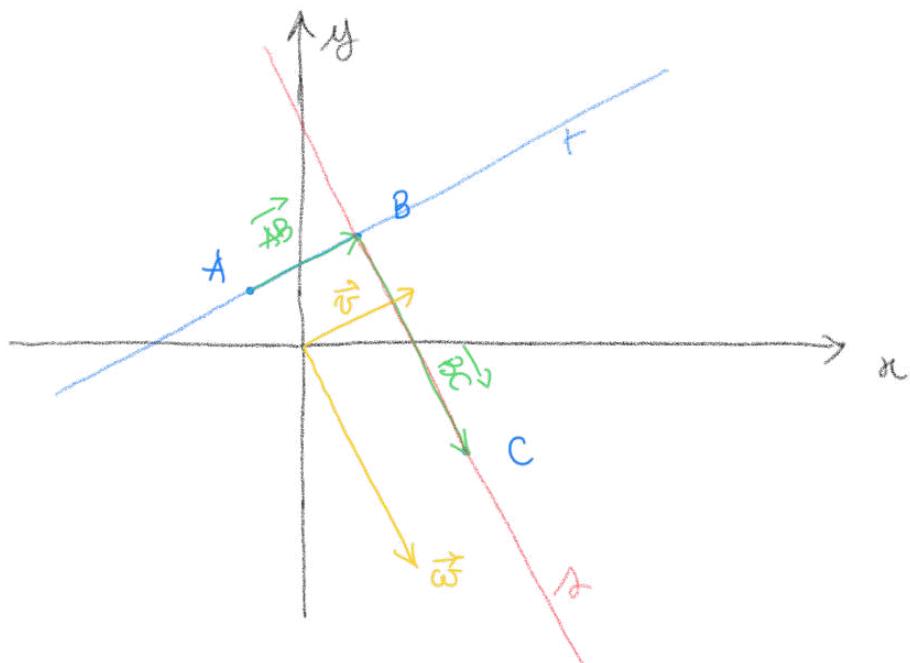
$$\sqrt{3} = 2 \cdot 1 \cdot \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}$$

ESERCIZIO 5

-) Definiamo i vettori direttori \vec{AB} e \vec{BC} e disegnandoli:

$$\vec{AB} = B - A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} =: \vec{v}$$

$$\vec{BC} = C - B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} =: \vec{\omega}$$



definiti i vettori direttori $\vec{\alpha}$ e $\vec{\omega}$ possiamo applicare l'equazione generica vista nell'esercizio 4 per determinare le forme parametriche di t e s : considerando le relazioni appartenenze di A, B e C (i.e. $A \in r$; $B \in r$; $B \in s$; $C \in s$):

$$t = \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + t \end{cases} \quad s = \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 4t \end{cases}$$

(a cui forma cartesiana è data esplicitando la t come segue:

$$[\text{per } r] \quad t = \frac{x+1}{2} \Rightarrow y = 1 + \frac{x+1}{2} = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

$$[\text{per } s] \quad t = \frac{y-1}{2} \Rightarrow y = 2 - 2x + 2 = -2x + 4$$

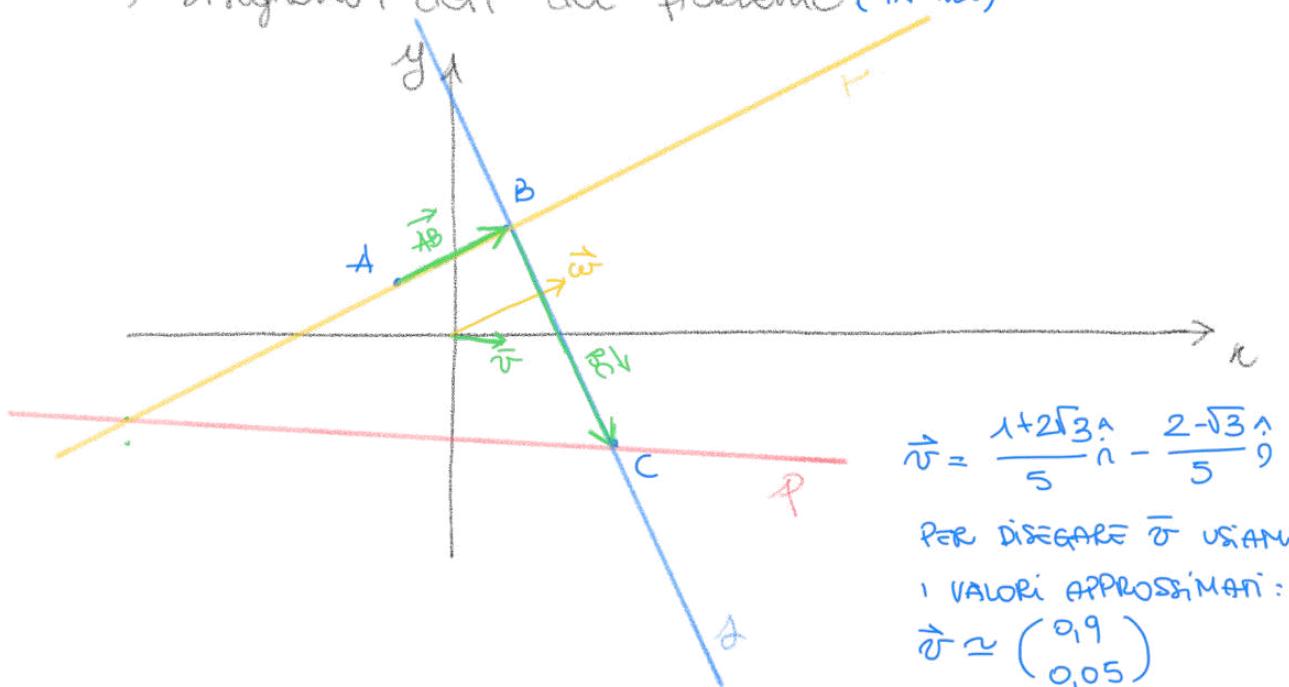
[NB.: osservando i coef. angolari notiamo che:

$$m_r = -\frac{1}{m_s} \quad \text{infatti } m_s = -2 = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{m_r}$$

cio' significa che le due rette sono ortogonali
e che l'angolo compreso tra loro è $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$

ESERCIZIO 6

-) Disegniamo i dati del problema (IN BLU)



$$\vec{v} = \frac{1+2\sqrt{3}}{5}\hat{i} - \frac{2-\sqrt{3}}{5}\hat{j}$$

PER DISEGNARE \vec{v} USIAMO
I VALORI APPROSSIMATIVI:
 $\vec{v} \approx \begin{pmatrix} 0,9 \\ 0,05 \end{pmatrix}$

-) determiniamo il vettore direttrice di r :

$$\vec{\omega} = \vec{AB} = B - A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

r si scrive quindi come segue:

i) $r = \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + t \end{cases}$ o in forma cartesiana $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

perché s sia ortogonale a r dobbiamo impostare

$$m_r = -\frac{1}{m_s} = -2$$

ii) $\Rightarrow s: \begin{cases} y = m_s x + q_s \end{cases} = \begin{cases} y = -2x + q_s \end{cases}$

Impongo il passaggio per il punto $C = (3, -2)$
e ottengo

$$-2 = -2 \cdot 3 + q_f \Rightarrow q_f = 4$$

$$\Rightarrow s: \begin{cases} y = -2x + 4 \end{cases} \circ \text{in forme parametriche} \quad \begin{cases} h = t \\ y = 4 - 2t \end{cases}$$

iii) per calcolare ρ uso il vettore direttore noto $\vec{\alpha}$ ed il punto $C \in \rho$:

$$\Rightarrow \rho = \begin{cases} x = 3 + \frac{1+2\sqrt{3}}{5}t \\ y = -2 - \frac{2-\sqrt{3}}{5}t \end{cases}$$

•) per determinare a questo punto l'angolo tra s e ρ uso il prodotto scalare dei vettori:

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\rho} = |\vec{\alpha}| |\vec{\rho}| \cos \varphi$$

dove $\vec{\alpha}$ è il vettore direttore della retta s
ossia:

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

si ha quindi:

$$\text{i)} |\vec{\alpha}| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$\text{ii)} |\vec{\rho}| = \sqrt{\left(\frac{1+2\sqrt{3}}{5}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}-2}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{iii)} \vec{\alpha} \cdot \vec{\rho} = \alpha_x \rho_x + \alpha_y \rho_y = \frac{1+2\sqrt{3}}{5} + (-2) \frac{\sqrt{3}-2}{5} = 1$$

sviluppando i valori nell'equazione del prodotto scalare otteniamo

$$1 = \sqrt{5} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$$

ESERCIZIO 7

La traslazione è una trasformazione del piano che può essere rappresentata in forma vettoriale come segue:

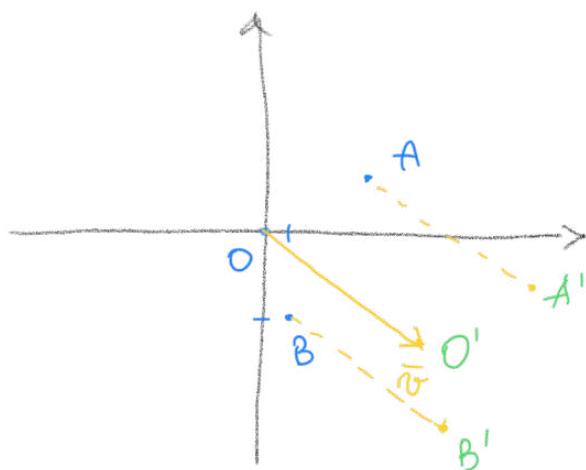
$$t_{\vec{v}}(\vec{w}) = \vec{w} + \vec{v} \quad (\text{traslazione di un vettore } \vec{v})$$

o anche su terna di componenti:

$$t_{\vec{v}} := \begin{cases} x' = x + 2x \\ y' = y + 2y \end{cases}$$

Nel nostro caso si ha:

$$t_{\vec{v}} := \begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = y - 2 \end{cases} \quad \text{con } \vec{v} = 3\hat{i} - 2\hat{j}$$



$$\Rightarrow O' \text{ è dato da} \quad \begin{cases} x'_0 = x_0 + 3 \\ y'_0 = y_0 - 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x'_0 = 3 \\ y'_0 = -2 \end{cases}$$

[NB.: La traslazione non conserva le posizioni dell'origine]

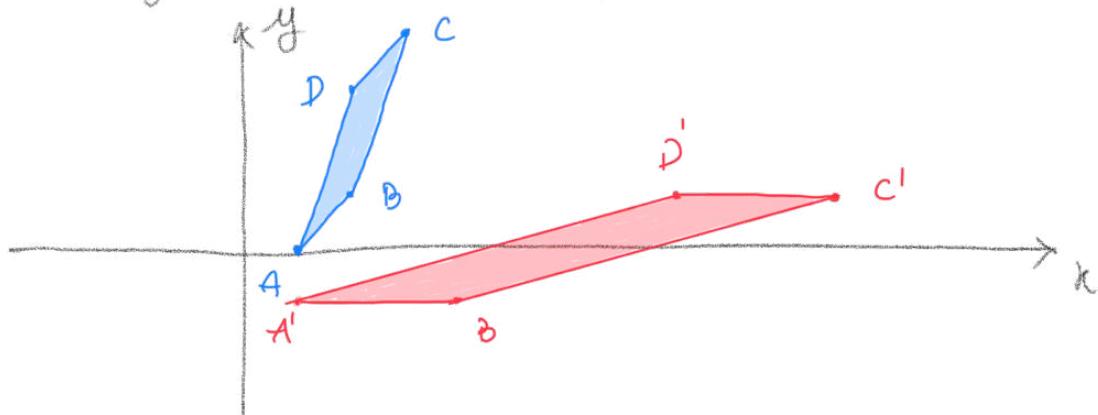
similmente abbiamo

$$A' := \begin{cases} x' = 2 + 3 = 5 \\ y' = 1 - 2 = -1 \end{cases}$$

$$B' := \begin{cases} x' = \frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2} \\ y' = -\frac{3}{2} - 2 = -\frac{7}{2} \end{cases}$$

ESERCIZIO (8)

- Disegniamo i dati del problema (in blu)



dal disegno $ABCD =: P$ sembra essere un parallelogramma
per dimostrarlo matematicamente verifichiamo

- i) lati uguali e paralleli \Rightarrow due a due
- ii) angoli non retti (i.e. diversi da $\pi/2$)

verifichiamo (i) usando le proprietà dei vettori:

$$\vec{AB} = B - A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AD} = D - A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{DC} = C - D = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{BC} = C - B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \vec{AB} = \vec{DC}$ e $\vec{AD} = \vec{BC}$ ovvero i lati sono paralleli con stesso modulo.

Verifichiamo (ii) calcolando uno degli angoli sorti tra due lati. Per farlo applico la formula del prodotto scalare:

$$\vec{AB} \cdot \vec{AD} = |\vec{AB}| |\vec{AD}| \cos \varphi$$

$$i) |\vec{AB}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$ii) |\vec{AD}| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

$$iii) \vec{AB} \cdot \vec{AD} = AB_x AD_x + AB_y AD_y = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 4$$

$$\Rightarrow 4 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{10} \cdot \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

In questo caso non è importante calcolare φ ma basta notare che

$$\cos \varphi \neq 0 \Rightarrow \varphi \neq \frac{\pi}{2}$$

-) Applichiamo ora la trasformazione II: sfruttando il prodotto matrice - vettore

$$A' = MA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \\ -1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$B' = MB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$C' = MC = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$D' = MD = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

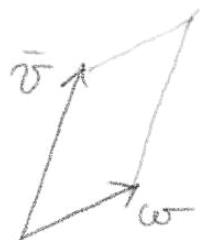
[NB: Disegnare i punti trasformati]

•) $\det(M) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 - (-1 \cdot 2) = 3$

•) Per il calcolo dell'area possiamo applicare la relazione tra vettori e parallelogramma sotto definendo la matrice

$$N = \begin{pmatrix} v_x & w_x \\ v_y & w_y \end{pmatrix}$$

con \vec{v} e \vec{w} lati del parallelogramma



\Rightarrow L'area di tale parallelogramma è uguale al $|\det(N)|$ -

nel nostro caso : $N = \begin{pmatrix} AB_x & AD_x \\ AB_y & AD_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \text{Area}(\tilde{P}) = |\det(N)| = |1 \cdot 3 - 1 \cdot 1| = 2$$

Applichiamo ora la relazione :

$$|\det(M)| = \frac{\text{Area}(\tilde{P}')}{\text{Area}(P)}$$

ossia che il determinante di una trasformazione lineare è uguale al rapporto tra l'area del poligono trasformato e l'area del poligono non trasformato -

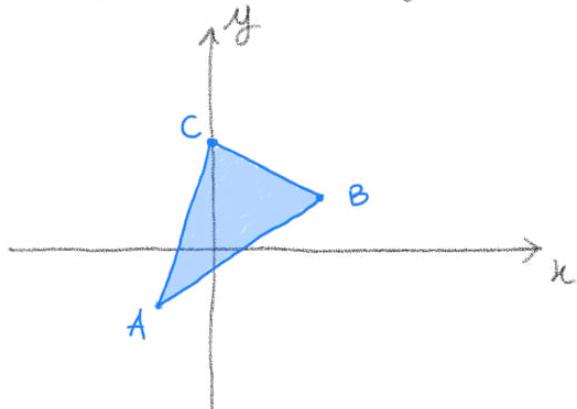
nel nostro caso :

$$3 = \frac{\text{Area}(\tilde{P}')}{2} \Rightarrow \text{Area}(\tilde{P}') = 6$$

■

ESERCIZIO 9

-) Disegniamo il triangolo dato



una matrice di rotazione con angolo di genetica si scrive:

$$R := \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

nel nostro caso $\alpha = \frac{\pi}{3}$ quindi abbiamo:

$$R = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

-) la trasformazione secondo R dei punti dati sarà quindi:

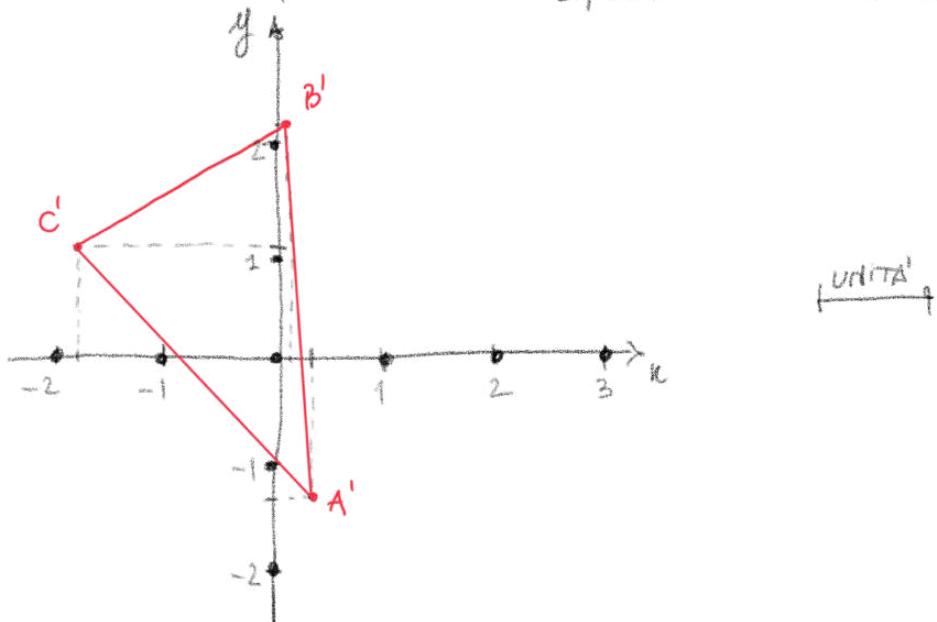
$$A' = MA = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}+1}{2} \end{pmatrix}$$

$$B' = MA = \begin{pmatrix} \frac{2-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{2\sqrt{3}+1}{2} \end{pmatrix}$$

$$C' = MA = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

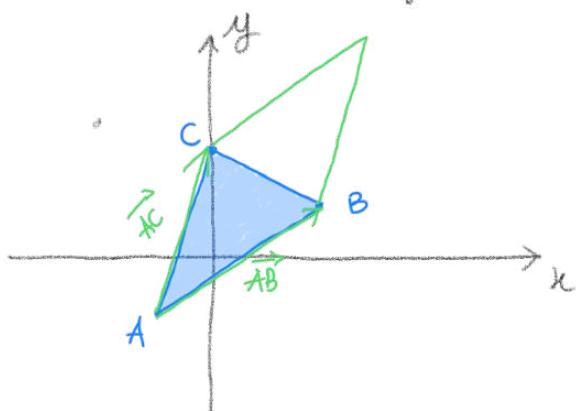
per disegnare $\triangle ABC'$ approssimiamo le componenti come segue

$$A' \approx \begin{pmatrix} 0,37 \\ -1,37 \end{pmatrix} \quad B' \approx \begin{pmatrix} 0,13 \\ 2,23 \end{pmatrix} \quad C' \approx \begin{pmatrix} -1,73 \\ 1 \end{pmatrix}$$



[NB.: essendo la rotazione un'isometria $\text{Area}(\triangle ABC) = \text{Area}(\triangle ABC')$

- per calcolare l'area di $\triangle ABC$ (e quindi di $\triangle ABC'$) definiamo i vettori \vec{AB} e \vec{AC} lati di un parallelogramma \tilde{P} con area doppia al triangolo



$$\vec{AC} = C - A = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} = B - A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

L'Area di \tilde{P} equivale al modulo del det. di una matrice N con colonne i due vettori:

$$N = \begin{pmatrix} AB_x & AC_x \\ AB_y & AC_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

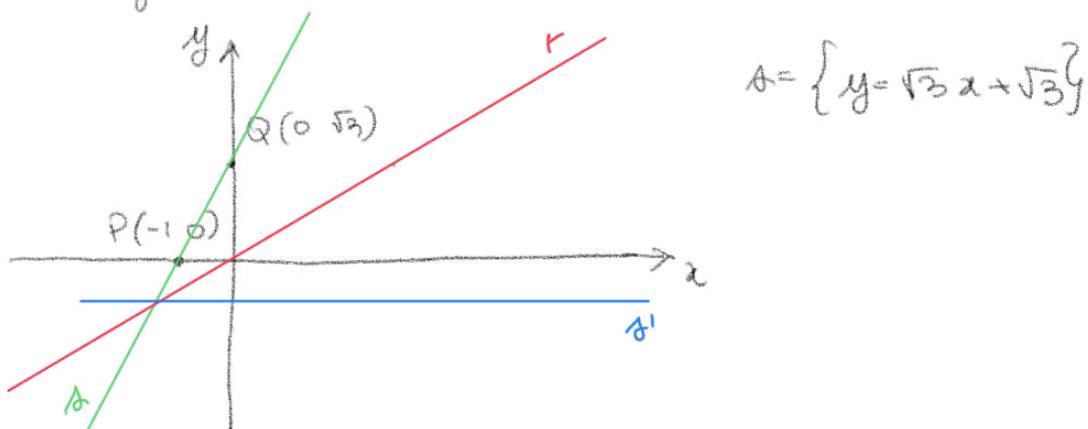
$$\Rightarrow |\det(N)| = \left| \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right| = |9 - 2| = 7$$

$$\Rightarrow \text{Area}(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2} \text{Area}(\tilde{P}) = \frac{7}{2}$$

■

Esercizio 10

•) Disegniamo A (in verde)



per determinare r ricordiamo che aveva forma $y = mx$ poiché passa per $O = (0,0)$.

Seppiemo inoltre che $m_r = \tan \alpha$ con α angolo di incidenza con l'asse x.

$$\Rightarrow m_r = \tan \alpha = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow r: \{y = \frac{\sqrt{3}}{3}x\}$$

•) una matrice di simmetria rispetto ad un asse inclinato di un angolo α e passante per il centro si scrive:

$$M = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

de nel nostro caso diventa:

$$M = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & \sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & -\cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- M eredita la linearità delle matrici, serve solo verificare che non modifica il centro O del piano:

$$O' = MO = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- \hookrightarrow Trasformata di s' sarà quindi (scrivendo s' in forma parametrica):

$$s = \begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{3}t + \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow s' = As$$

$$\text{cioè } \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} t \\ \sqrt{3}t + \sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \sqrt{3}t + \sqrt{3} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} t + 3t + 3 \\ \sqrt{3}t - \sqrt{3}t - \sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4t + 3 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t + \frac{3}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{quindi } s' = \begin{cases} x = 2t + \frac{3}{2} \\ y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

[NB y di s' non dipende da t questo significa che $\forall t (e \forall x) y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow s'$ è la retta orizzontale con valore $-\frac{\sqrt{3}}{2}$]

ESERCIZIO 11

-) L'auotetla è una trasformazione affine nel piano che dilata (o contrae) le distanze di un dato fattore λ rispetto ad un dato centro C .

Nel caso di centro O l'autotetla può essere scritta in forma vettoriale come segue:

$$\vec{v}' = \lambda \vec{v} \quad \text{con } \vec{v} \in \mathbb{R}^2 \text{ e } \lambda \in \mathbb{R}$$

nel nostro caso abbiamo quindi

$$\vec{v}' = \sqrt{3} \vec{v}$$

perché tale trasformazione abbia forma matriciale dobbiamo poter scrivere

$$\vec{v}' = M \vec{v}$$

dalla definizione si ha

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \sqrt{3} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sqrt{3} I \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sqrt{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

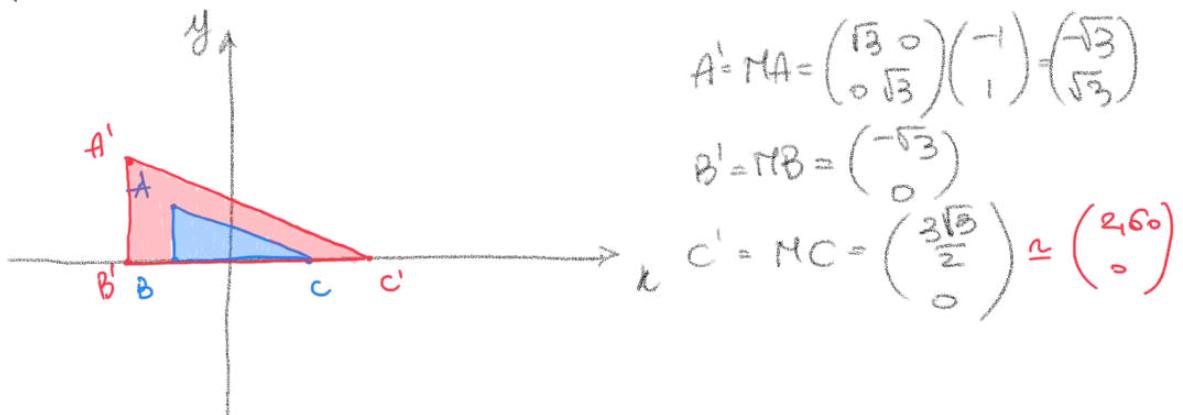
$$= \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$M := \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ è la matrice che esprime l'autotetla richiesta

-) Essendo M una matrice, eredita le proprietà di linearità delle matrici. Tuttavia in generale le autotetie sono delle affinità che quindi non conservano necessariamente l'origine. Verifichiamo che questa particolare trasformazione mantiene fisso O :

$$O' = MO = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

-) Disegniamo $\triangle ABC$ e calcoliamo il suo trasformato rispetto ad M



-) ci troviamo di fronte ad un Triangolo rettangolo le cui aree puo' essere calcolate anche utilizzando Pitagora:

$$\overline{B'C'} = \frac{5\sqrt{3}}{2} \quad (\text{cateto maggiore})$$

$$\overline{BA'} = \sqrt{3} \quad (\text{cateto minore})$$

$$\text{Area}(\triangle A'B'C') = \frac{\overline{B'C'} \times \overline{BA'}}{2} = \frac{\frac{5\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{15}{2}}{2} = \frac{15}{4}$$

+