Soluzioni Esercitazione 1

A. Giarnetti

- **Esercizio 1.**

a) Dato che i due vettori congiungono i punti con l'origine, nella base i e j i due vettori sono semplicemente $\mathbf{v}$=(1,-$\sqrt{2}$) e $\mathbf{w}$=(2,1).

b) Il modulo si ottiene facendo la radice quadrata della somma delle componenti dei vettori al quadrato

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{1+2} = \sqrt{3} \tag{1}$$

$$|\mathbf{w}| = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} \tag{2}$$

c) Dato che entrambi i moduli sono diversi da 1, i due vettori non sono versori. Per trovare i versori diretti nella loro direzione bisogna dividere tutte le componenti dei vettori per il loro modulo

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -\sqrt{2}) \tag{3}$$

$$\hat{\mathbf{w}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1) \tag{4}$$

Risulta facile verificare che questi vettori sono paralleli ai vettori precedenti e hanno modulo unitario.

d) Il prodotto scalare di due vettori lo troviamo, se conosciamo le componenti, facendo la somma dei prodotti delle componenti

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_x w_x + v_y w_y = 2 - \sqrt{2} \tag{5}$$

e) Sappiamo che vale $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = |\mathbf{v}||\mathbf{w}| \cos\theta$ dove θ è l'angolo compreso tra i due vettori. Quindi

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{v}||\mathbf{w}|} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{15}} \tag{6}$$

da cui otteniamo che $\theta \sim 81° = 1.4rad$.

f) I vettori somma e differenza si ottengono rispettivamente sommando e sottranedo i vettori componente per componente

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (1+2, -\sqrt{2}+1) = (3, 1-\sqrt{2}) \tag{7}$$

$$\mathbf{v} - \mathbf{w} = (1-2, -\sqrt{2}-1) = (-1, -1-\sqrt{2}) \tag{8}$$

da cui otteniamo che le coordinate dei punti A e B sono $A = (3, 1-\sqrt{2})$ e $B = (-1, -1-\sqrt{2})$.

- **Esercizio 2.**
  I versori sono dei vettori con modulo unitario. Di conseguenza calcoliamo i moduli dei due vettori in funzione di a e b.

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + 9a^2} = |a|\sqrt{10} \tag{9}$$

$$|\mathbf{w}| = \sqrt{4b^2 + b^2} = |b|\sqrt{5} \tag{10}$$

  Imponendo che questi due moduli siano pari a 1, otteniamo che

$$a = \pm 1/\sqrt{10} \tag{11}$$

$$b = \pm 1/\sqrt{5} \tag{12}$$

  Per quanto riguarda l'angolo compreso tra i due vettori, per trovarlo abbiamo bisogno del prodotto scalare

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = ab(2-3) = -ab \tag{13}$$

  A questo punto avremo che

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{v}||\mathbf{w}|} = \frac{-ab}{|a||b|\sqrt{50}} = \frac{-sign(ab)}{\sqrt{50}} \tag{14}$$

  Da cui otteniamo che l'angolo non dipende dai valori assoluti di a e b, ma dipende dal segno del loro prodotto. Infatti a seconda di questo segno il coseno dell'angolo potrà essere $1/\sqrt{50}$ oppure $-1/\sqrt{50}$, ovvero l'angolo potrà essere pari a 82° o 98°.

- **Esercizio 3.**
  In questo caso dobbiamo sommare tre vettori diversi.

  - Il primo vettore ha modulo 100.0 ed è diretto verso Nord-Est, ovvero è nel primo quadrante. Le sue coordinate saranno

$$\mathbf{A} = (100\cos 30°, 100\sin 30°) = (86.6, 50) \tag{15}$$

  - Il secondo vettore ha modulo 80.0 ed è diretto verso Nord-Ovest, ovvero si trova nel quarto quadrante. Considerando che l'angolo dato è rispetto all'asse y, otteniamo che

$$\mathbf{B} = (-80\sin 30°, 80\cos 30°) = (-40, 69.3) \tag{16}$$

  - Il terzo vettore ha modulo 40.0 ed è diretto verso Sud-Ovest ovvero si trova nel quarto quadrante. Le coordinate sono

$$\mathbf{C} = (-40\cos 53°, -40\sin 53°) = (-24.1, -31.9) \tag{17}$$

Il vettore risultante, ovvero la somma dei tre vettori, avrà come componenti la somma delle componenti dei tre vettori

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} = (22.5, 87.4) \tag{18}$$

Quindi questa forza sarà diretta verso Nord-Est (primo quadrante) e avrà un modulo pari a $|\mathbf{R}| = \sqrt{22.5^2 + 87.4^2}\,N = 90\,N$. Per trovare la sua direzione dobbiamo calcolare l'angolo che forma questo vettore con l'asse x.
Un modo per fare questo è considerare il versore i, che è diretto lungo l'asse x e usare la solita formula

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{R} \cdot i}{|\mathbf{R}||i|} = \frac{22.5}{90} \tag{19}$$

da cui otteniamo che $\theta = 75°$. Una formula diretta ed equivalente alla precedente e più diretta per trovare l'angolo che forma un vettore $\mathbf{R}$ con l'asse x è

$$\tan\theta = \frac{R_y}{R_x} \tag{20}$$

Il fatto che le due siano identiche lo possiamo capire dal fatto che nella prima formula abbiamo che $\cos\theta = R_x/|\mathbf{R}|$, da cui ricaviamo direttamente $\sin\theta = R_y/|\mathbf{R}|$ e dunque $\tan\theta = R_y/R_x$.

- **Esercizio 4.**
  Consideriamo il vettore che passa per A e B. Questo vettore avrà coordinate nella base i e j pari a $\mathbf{v} = (A_x - B_x, A_y - B_y) = (-1, -5)$. A questo punto per trovare le equazioni parametriche della retta che passa per A e B basta considerare una retta parallela al vettore $\mathbf{v}$ che passi per esempio per A. Ovvero

$$r = \begin{cases} x = v_x t + A_x \\ y = v_y t + A_y \end{cases} = \begin{cases} x = -1 - t \\ y = 2 - 5t \end{cases} \tag{21}$$

Una retta parallela a r avrà come vettore direttore lo stesso appena considerato, ovvero $\mathbf{v}$. Basta quindi imporre che questa retta passi per l'origine per rispondere alla domanda del problema

$$s = \begin{cases} x = -t \\ y = -5t \end{cases} \tag{22}$$

Per trovare una retta perpendicolare a r bisogna trovare un vettore ortogonale al vettore $\mathbf{v}$ che sarà proprio il vettore direttore della nostra nuova retta. La condizione di ortogonalità tra due vettori è che il loro prodotto scalare deve essere nullo. Quindi se chiamiamo $\mathbf{w}$ il vettore ortogonale, deve valere che

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = -w_x - 5w_y = 0 \tag{23}$$

Quindi le componenti del vettore **w** sono tali che $w_x = -5w_y$. Possiamo scegliere allora per esempio $w_y = 1$ e $w_x = -5$. Il vettore direttore della nostra retta perpendicolare a r sarà allora **w**=(-5,1). La retta che stiamo cercando che passa per l'origine sarà allora la retta

$$q = \begin{cases} x = -5t \\ y = t \end{cases} \tag{24}$$

- **Esercizio 5.**
  Troviamo le equazioni parametriche delle due rette. Per quanto riguarda la prima conosciamo già il suo vettore direttore e il punto da cui passa, di conseguenza otteniamo direttamente

$$s = \begin{cases} x = v_x t + C_x \\ y = v_y t + C_y \end{cases} = \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 7 + 3t \end{cases} \tag{25}$$

  Per la retta r il suo vettore direttore è il vettore che congiunge A e B, ovvero **w**=(1,2). Quindi considerando una retta parallela a questo vettore che passa per esempio per A, troviamo che

$$r = \begin{cases} x = w_x t' + A_x \\ y = w_y t' + A_y \end{cases} = \begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 1 + 2t' \end{cases} \tag{26}$$

  Per trovare il punto di intersezione dobbiamo trovare un punto che appartiene ad entrambe le rette. Per fare questo troviamo dobbiamo uguagliare le equazioni parametriche delle due rette e trovare i valori di t e t' che risolvono il sistema

$$\begin{cases} 1 - t = 1 + t' \\ 7 + 3t = 1 + 2t' \end{cases} = \begin{cases} t' = -t \\ 7 + 3t = 1 - 2t \end{cases} = \begin{cases} t' = -t \\ 5t = -6 \end{cases} \tag{27}$$

  Quindi i valori di t e t' che risolvono il sistema sono t=-6/5 e t'=6/5. Sostituendo questi valori nelle equazioni parametriche delle due rette troviamo x=11/5, y=17/5. Dunque il punto di intersezione sarà P=(11/5,17/5).

- **Esercizio 6.**
  Il vettore direttore della retta lo troviamo direttamente considerando i coefficienti della t. Dunque avremo **v**=(1,-6). Per quanto riguarda la distanza dei punti dalla retta dall'origine, possiamo usare la formula

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(t+1)^2 + (1-6t)^2} = \sqrt{t^2 + 2t + 1 + 1 + 36t^2 - 12t} \tag{28}$$

  Quindi dato che vogliamo sapere per quali valori di t questa distanza vale $\sqrt{2}$, dobbiamo risolvere l'equazione

$$37t^2 - 10t + 2 = 2 \tag{29}$$

  che ha come soluzioni t=0 e t=10/37. Siccome se sostituiamo t=10/37 otteniamo una coordinata y negativa, il punto A che cerchiamo nel primo quadrante sarà quello corrispondente

a t=0, ovvero A=(1,1).
Adesso dobbiamo trovare i due punti sulla retta distanti 3 dal punto A. Usando la stessa formula per la distanza, otteniamo

$$d = \sqrt{(x-A_x)^2 + (y-A_y)^2} = \sqrt{t^2 + 36t^2} \tag{30}$$

Dato che dobbiamo porre questa distanza uguale a 3, l'equazione da risolvere è

$$37t^2 = 9 \tag{31}$$

che ha come soluzioni $t = \pm 3/\sqrt{37}$. Quindi i due punti che cerchiamo sono $B = (3 + 3/\sqrt{37}, 1 - 18/\sqrt{37})$ e $C = (3 - 3/\sqrt{37}, 1 + 18/\sqrt{37})$.

- **Esercizio 7.**

Per trovare la retta passante da A e da B, troviamo il vettore che congiunge i due punti, che si trova sottraendo le componenti dei due punti. Sarà quindi il vettore $\mathbf{w}$=$(-1, 3+\sqrt{2})$. Imponendo il passaggio per esempio per B, troviamo che l'equazione della retta richiesta è

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -3 + (3+\sqrt{2})t \end{cases} \tag{32}$$

La retta avente come vettore direttore $\mathbf{v}$ passante per C sarà semplicemente

$$\begin{cases} x = -5 - 2t \\ y = -1/2 + t \end{cases} \tag{33}$$

Dato che i vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ non sono multipli uno dell'altro, vuol dire che le due rette sicuramente non sono parallele. Inoltre, dato che il prodotto scalare tra i due vettori direttori

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 5 + \sqrt{2} \tag{34}$$

è diverso da zero, le due rette non sono nemmeno perpendicolari. Saranno allora due rette incidenti. Per trovare il punto di intersezione, risolviamo il sistema

$$\begin{cases} 2 - t = -5 - 2t' \\ 3 + (3+\sqrt{2})t = -1/2 + t' \end{cases} = \begin{cases} t = 7 + 2t' \\ 7/2 + 21 + 7\sqrt{2} + 6t' + 2\sqrt{2}t' = t' \end{cases} = \begin{cases} t = 7 + 2t' \\ 49/2 + 7\sqrt{2} = -(5+2\sqrt{2})t' \end{cases} \tag{35}$$

da cui otteniamo che $t' = -7\frac{7+2\sqrt{2}}{10+4\sqrt{2}}$ e $t = -\frac{14}{5+2\sqrt{2}}$. Sostituendo questi valori nelle equazioni parametriche otteniamo le coordinate del punto di intersezione.

- **Esercizio 8.**
  Per trovare le intersezioni con l'asse x e l'asse y annulliamo rispettivamente le coordinate y e x del luogo dei punti descritto dalla retta. Quindi, annullando la coordinata y troviamo t=-1/2, che ci descrive il punto A=(2,0) di intersezione con l'asse x. Annullando la coordinata x, invece, troviamo t=3/2, al quale corrisponde il punto B=(0,4) che è il punto di intersezione con l'asse y.

  a) Abbiamo quindi un triangolo rettangolo di cateti OA e OB e di ipotenusa AB. L'area dello stesso sarà quindi il mezzo prodotto delle lunghezze dei cateti (OA e OB). Quindi A=4.
  Il perimetro sarà invece la somma delle lunghezze dei lati. Dato che OA misura 2, OB misura 4 e AB misura $\sqrt{4^2+2^2} = 2\sqrt{5}$ (teorema di Pitagora), il perimetro sarà $P = 2(3+\sqrt{5})$.

  b) Trasformiamo i vertici del triangolo mediante la matrice M. L'origine rimarrà la stessa. Invece i punti A e B saranno trasformati

  $$A' = MA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \tag{36}$$

  $$B' = MB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix} \tag{37}$$

  c) Abbiamo adesso un triangolo generico. Calcoliamo l'area usando solo delle nozioni di geometria. Se usiamo il lato A'B' come base, per trovare l'altezza abbiamo bisogno di trovare la retta perpendicolare ad A'B' che passa per il terzo vertice, ovvero O. Il vettore direttore della retta per A'B' sarà **v**=(6,0). Ci serve trovare un vettore **w** perpendicolare a **v**. Imponendo che il prodotto scalare tra i due vettori sia nullo, possiamo scegliere come vettore direttore **w**=(0,1). Quindi la retta perpendicolare ad A'B' passante per l'origine sarà

  $$\begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases} \tag{38}$$

  L'intersezione tra questa retta e il segmento A'B' si trova per t=4. Quindi il piede H dell'altezza non è nient'altro che H=(0,4). La lunghezza dell'altezza, ovvero il segmento OH sarà quindi 4. La lunghezza della base, ovvero del segmento A'B' è pari a 6. Di conseguenza l'area del triangolo trasformato sarà A'=12.
  Il metodo appena presentato è il più generico possibile. Tuttavia notando che il segmento A'B' è parallelo all'asse delle x si sarebbe potuta trovare facilmente l'altezza del triangolo.
  Per quanto riguarda il perimetro del triangolo trasformato notiamo come A'B' è lungo 6, A'O è lungo $\sqrt{2^2+4^2} = 2\sqrt{5}$ mentre B'O è lungo $\sqrt{4^2+4^2} = 4\sqrt{2}$. Di conseguenza $P' = 2(3+\sqrt{5}+2\sqrt{2})$.

  d) Abbiamo trovato l'area del triangolo trasformato usando solo nozioni di geometria. Sappiamo però che possiamo usare le proprietà della trasformazione usata per trovare una relazione tra le aree delle figure trasformate e non trasformate. Calcoliamo il determinate della matrice M

$$det(M) = 1 + 2 = 3 \tag{39}$$

Notiamo allora come $A' = det(M)\, A$. Dato che il determinante può essere anche negativo, in generale questa relazione si scrive in generale come $A' = |det(M)|\, A$

- **Esercizio 9.**
  Scriviamo le rette che descrivono i lati della figura e la lunghezza dei lati:

  - AB. Questo segmento ha lunghezza $\sqrt{(1-3)^2 + (1+3)^2} = 2\sqrt{5}$. La retta che lo passa per A e B è

    $$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 + 4t \end{cases} \tag{40}$$

    con vettore direttore $\mathbf{v_1} = (-2, 4)$.

  - BC. Questo segmento ha lunghezza $\sqrt{(3+1)^2 + (-3+1)^2} = 2\sqrt{5}$. La retta che lo passa per B e C è

    $$\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = -3 - 2t \end{cases} \tag{41}$$

    con vettore direttore $\mathbf{v_2} = (4, -2)$

  - CD. Questo segmento ha lunghezza $\sqrt{(-1+3)^2 + (-1-3)^2} = 2\sqrt{5}$. La retta che lo passa per C e D è

    $$\begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = -1 + 4t \end{cases} \tag{42}$$

    con vettore direttore $\mathbf{v_3} = (-2, 4)$.

  - DA. Questo segmento ha lunghezza $\sqrt{(-3-1)^2 + (3-1)^2} = 2\sqrt{5}$. La retta che lo passa per D e A è

    $$\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 1 - 2t \end{cases} \tag{43}$$

    con vettore direttore $\mathbf{v_4} = (4, -2)$.

  Come possiamo vedere abbiamo 4 lati di lunghezza identica ($2\sqrt{5}$) paralleli a due a due (i vettori direttori di AB e di CD sono uguali e lo stesso vale per i vettori direttori di BC e DA). Dato che il prodotto scalare tra i vettori direttori diversi tra loro è diverso da zero, i lati adiacenti della figura non sono perpendicolari. Quindi si tratta di un **rombo**. L'area del rombo la calcoliamo come il mezzo prodotto delle due diagonali. Le due diagonali sono i segmenti AC (diagonale minore) e BD (diagonale maggiore). La lunghezza di AC è pari a $\sqrt{(1+1)^2 + (1+1)^2} = 2\sqrt{2}$. La lunghezza di BD è pari a $\sqrt{(3+3)^2 + (3+3)^2} = 6\sqrt{2}$. Quindi l'area della figura sarà $A = 12$.
  Una volta trasformata la figura, otterremo un nuovo quadrilatero, la cui area sarà legata a quelal appena calcolata mediante il determinante della matrice M. Questo sarà pari a

$det(M) = 0-3 = -3$. Di conseguenza l'area della nuova figura sarà pari a $A' = |det(M)|A = 36$.
Per completezza troviamo le coordinate dei nuovi vertici del quadrilatero:

$$A' = MA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{44}$$

$$B' = MB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 15 \end{pmatrix} \tag{45}$$

$$C' = MC = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{46}$$

$$D' = MD = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -15 \end{pmatrix} \tag{47}$$

- **Esercizio 10.**

    a) La retta passante per A e B la possiamo trovare imponendo alla retta generica parallela al vettore che congiunge A e B il passaggio per esempio per il punto A. Otteniamo quindi

    $$\begin{cases} x = 5 + 5t \\ y = -2t \end{cases} \tag{48}$$

    b) Il punto medio tra A e B avrà come coordinate la semisomma delle coordinate di A e B. Quindi M=(5/2,1). La lunghezza del segmento OM sarà allora $l = \sqrt{(5/2)^2 + 1} = \sqrt{29}/2$.

    c) Scegliamo come base dei triangoli i due lati "esterni" AO e BO. Per trovare l'altezza abbiamo bisogno della perpendicolare a questi due lati che passa per il vertice opposto, ovvero M.
    Cominciamo con il triangolo AOM. La retta che passe per AO la possiamo scrivere come

    $$\begin{cases} x = 5t \\ y = 0 \end{cases} \tag{49}$$

    La retta perpendicolare a questa avrà come vettore direttore il vettore (0,1). Se imponiamo il passaggio per M otteniamo la retta

    $$\begin{cases} x = 5/2 \\ y = 1 + t \end{cases} \tag{50}$$

    Il punto di intersezione di questa retta perpendicolare (che contiene l'altezza del triangolo AOM) con la base AO, è il punto H=(5/2,0). L'altezza sarà allora la lunghezza del segmento HM, che è pari a h=1. Considerando che la base AO è lunga 5, otteniamo che l'area del triangolo è $A_1 = 5/2$.

Ripetiamo lo stesso procedimento con il triangolo BOM. La base scelta è BO. Troviamo quindi la retta che contiene questo segmento, ovvero

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2t \end{cases} \tag{51}$$

Una volta fatto questo, consideriamo che la perpendicolare avrà come vettore direttore (1,0). Di conseguenza la retta perpendicolare a BO che passa per M, sarà

$$\begin{cases} x = 5/2 + t \\ y = 1 \end{cases} \tag{52}$$

Il punto di intersezione di questa retta con la base BO è K=(0,1). Quindi l'altezza, ovvero il segmento MK avrà lunghezza k=5/2. Dato che la base BO è lunga 2, l'area di questo secondo triangolo è pari a $A_2 = 5/2$.
Finalmente possiamo concludere che le due aree sono uguali e quindi il rapporto $A_1/A_2 = 1$. Questo perchè il segmento OM è la mediana del triangolo, la quale divide il triangolo in due triangoli equivalenti con la stessa area.

d) Il segmento OM è il vettore **v**=(5/2,1). Abbiamo visto che l'angolo che un segmento forma con l'asse x è tale che

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{2}{5} \tag{53}$$

Da cui $\theta = 21.8°$.

- **Esercizio 11.**
Il vettore OQ ha come componenti **v**=(2,3). Se consideriamo che il versore dell'asse y è il versore j=(0,1), possiamo concludere che l'angolo che OQ forma con l'asse y sarà tale che

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{v}\cdot j}{|\mathbf{v}||j|} = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tag{54}$$

da cui otteniamo che $\theta = 30°$.
Per trasformare il vettore trasformiamo mediante la matrice il punto Q.

$$Q' = MQ = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3}+3 \end{pmatrix} \tag{55}$$

L'angolo che il vettore **v'** OQ' forma con l'asse y è tale che

$$\cos\theta' = \frac{\mathbf{v}'\cdot j}{|\mathbf{v}'||j|} = \frac{3-2\sqrt{3}}{\sqrt{52}} \tag{56}$$

Da cui $\theta' = 93°$. Infatti il punto è stato spostato nel IV quadrante (coordinata y negativa, coordinata x positiva). Possiamo allora dedurre che la nostra matrice ha fatto sì che un vettore inclinato di 30° rispetto all'asse y, diventasse inclinato di 93° rispetto a quest'ultimo. Quindi la trasformazione rappresenta una rotazione di 63° rispetto all'asse y.

- **Esercizio 12.**

a) La retta che passa da A e B la troviamo usando come vettore direttore il vettore che congiunge A e B, ovvero il vettore **v**=(-2,1). Imponendo il passaggio per A otteniamo

$$r = \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 - t \end{cases} \tag{57}$$

b) Il punto medio tra A e B si trova considerando come sue componenti le semisomme delle componenti di A e B. Quindi le coordinate di M saranno M=(2,3/2). Dato che il vettore direttore di r è **v**=(-2,1), per trovare una retta perpendicolare abbiamo bisogno di un vettore direttore **w** che sia perpendicolare a **v**. Per trovarlo imponiamo

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = -2w_x + w_y = 0 \tag{58}$$

Questa equazione è risolta per qualsiasi vettore le cui componenti risolvono $2w_x = w_y$. Possiamo scegliere allora per esempio il vettore (1,2). La retta perpendicolare a r che passa per M avrà allora come equazioni parametriche

$$s = \begin{cases} x = 2 + t \\ y = \frac{3}{2} + 2t \end{cases} \tag{59}$$

c) Per trovare il punto di intersezione tra la retta s e l'asse y, basta trovare il valore di t che annulla la coordinata x. Questo è t=-2. Sostituendo questo valore nell'espressione per la coordinata y, otteniamo che il punto P ha come coordinate P=(0,-5/2).

d) Il triangolo AMP è un triangolo rettangolo, poichè l'angolo $A\hat{M}P$ è retto, dato che la retta r su cui giace AM e la retta s su cui giace MP sono perpendicolari. A questo punto calcoliamo quanto vale un altro degli angoli, per esempio l'angolo $P\hat{A}M$. Per fare ciò, ci basta trovare l'angolo tra i vettori AP e AM. Il vettore AM sarà il vettore **q**=(1,-1/2). Il vettore AP sarà invece **t**=(-1,-9/2). L'angolo compreso tra i due è tale che

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{t}}{|\mathbf{q}||\mathbf{t}|} = \frac{5/4}{\sqrt{5}/2 \cdot \sqrt{85}/2} = \frac{5}{\sqrt{425}} = \frac{1}{\sqrt{17}} \tag{60}$$

da cui otteniamo che $\theta = 76°$. Il terzo angolo, ovvero $A\hat{P}M$ lo troviamo per differenza considerando che la somma degli angoli interni di un triangolo è pari a un angolo piatto. Quindi avremo che $\theta' = 180° - 76° - 90° = 14°$.
Per trovare l'area del triangolo ricordiamo che in questo triangolo rettangolo AM e PM sono i due cateti. La lunghezza del primo è $\sqrt{5}/2$, mentre la lunghezza del secondo è $2\sqrt{5}$. Di conseguenza l'area, pari al loro semiprodtto, sarà A=5/2.