UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Dipartimento di Architettura - Istituzioni di Matematiche I - aa 2020-2021
Proff. C. Falcolini, P. Magrone

Esercitazione del 17-11-2020
dott. arch. F. Morera

Esercizio 1. Calcolare i seguenti limiti:

(a) $\lim_{x\to\pi} \dfrac{\sin x}{(\pi - x)}$

per sostituzione $t = \pi - x$ $\quad \lim_{t\to 0} \dfrac{\sin(\pi - t)}{t} = \lim_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$

(b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x^2}{x}$

moltiplico e divido per x $\quad \lim_{x\to 0} x\dfrac{\sin x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} x \cdot \lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x^2}{x^2} =$
$\lim_{x\to 0} x \cdot \lim_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 0 \cdot 1 = 0$ dove ho operato la sostituzione $t = x^2$

(c) $\lim_{x\to 1}(1-x)^2 \cos\frac{1}{1-x}$

si noti che la funzione $\cos\frac{1}{1-x}$ è limitata, si ha quindi:
$0 = -\lim_{x\to 1}(1-x)^2 \leq \lim_{x\to 1}(1-x)^2 \cos\frac{1}{1-x} \leq \lim_{x\to 1}(1-x)^2 = 0$

(d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x^2}{\cos 2x - 1}$

moltiplico e divido per x^2 $\quad \lim_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x^2}\dfrac{\sin x^2}{\cos 2x - 1} = \lim_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\cos 2x - 1} \cdot \lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x^2}{x^2} =$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\dfrac{\cos 2x - 1}{x^2}} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{x^2} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{-\dfrac{1-\cos t}{\dfrac{t^2}{4}}} \cdot \lim_{s\to 0} \frac{\sin s}{s} = -\frac{1}{2}$$

dove si è sostituito $t = 2x$ e $s = x^2$

(e) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x\sin^2 2x}{\sin x^3}$

moltiplico e divido per x^2 $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^3}{\sin x^3} \cdot \lim_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 2x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \dfrac{x^3}{\sin x^3} \cdot \lim_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{x} = \lim_{t\to 0} \dfrac{t}{\sin t} \cdot \lim_{s\to 0} \dfrac{\sin s}{\frac{s}{2}} \cdot \lim_{s\to 0} \dfrac{\sin s}{\frac{s}{2}} = 4$

dove si è sostituito $t = x^3$ e $s = 2x$

(f) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{\sin^2 x}$

applico la relazione trigonometrica $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{1 - \cos^2 x} = \lim_{x\to 0} -\dfrac{\cos x - 1}{\cos^2 x - 1} = \lim_{x\to 0} -\dfrac{\cos x - 1}{(\cos x - 1)(\cos x + 1)} = \lim_{x\to 0} -\dfrac{1}{(\cos x + 1)} = -\dfrac{1}{2}$

(g) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x - \tan x}{(1 - \cos x)^2}$

moltiplico e divido per x^4 $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^4}{(1 - \cos x)^2} \cdot \lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x - \tan x}{x^4} = \lim_{x\to 0} \left(\dfrac{x^2}{1 - \cos x}\right)^2 \cdot \lim_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x^4} - \dfrac{\sin x}{x^4 \cos x}\right) = \lim_{x\to 0} \left(\dfrac{x^2}{1 - \cos x}\right)^2 \cdot \lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} \cdot \lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \left(\dfrac{\cos x - 1}{x}\right) \cdot \lim_{x\to 0} \dfrac{1}{\cos x} = 4 \cdot (\pm\infty) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = \pm\infty$

(h) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$

scomponendo si ha $\lim_{x\to 2} \dfrac{(x^2 + 2x + 4)(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2} (x^2 + 2x + 4) = 12$

(i) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x - 1}}{x - 1}$

si noti che la funzione è ben definita per $x \geq 1$, il limite si intende quindi destro. Possiamo scrivere $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x - 1}}{\sqrt{x - 1}\sqrt{x - 1}} = \lim_{x\to 1} \dfrac{1}{\sqrt{x - 1}} = +\infty$

(l) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{x}$

moltiplico e divido per la stessa quantità

$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} =$
$\lim_{x\to 0} \frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = 1$

Esercizio 2. Stabilire per quali valori di k le seguenti funzioni sono continue:

$$\textbf{(a)} \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2\sqrt{3}x + 3)}{|x-\sqrt{3}|} & \text{se } x \neq \sqrt{3} \\ k(k-1) & \text{se } x = \sqrt{3}. \end{cases}$$

$f(x)$ sembra ben definita $\forall x \in \mathbb{R} : x \neq \sqrt{3}\}$, ma:

$\lim_{x\to\sqrt{3}} f(x) = \lim_{x\to\sqrt{3}} \frac{(x-\sqrt{3})^2}{|x-\sqrt{3}|} = \lim_{x\to\sqrt{3}} sing(x-\sqrt{3})\frac{(x-\sqrt{3})^2}{(x-\sqrt{3})} =$
$\lim_{x\to\sqrt{3}} sing(x-\sqrt{3})(x-\sqrt{3}) = \lim_{x\to\sqrt{3}} |x-\sqrt{3}| = 0$

che è evidentemente un limite di una funzione continua.
Perché però tutta $f(x)$ risulti continua, limite destro e sinistro in $x = \sqrt{3}$ devono essere finiti e coincidenti con il valore di $f(\sqrt{3})$ cioé $k(k-1)$ come da definizione di $f(x)$ stessa.
Si deve imporre quindi la condizione $k(k-1) = f(\sqrt{3}) = \lim_{x\to\sqrt{3}^\pm} f(x) = 0$ che si realizza per $k \in \{0,1\}$

$$\textbf{(b)} \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2-10x+25)}{x-5} & \text{se } x \neq 5 \\ k^2 - 4k + 4 & \text{se } x = 5. \end{cases}$$

Come in (a), $f(x)$ è continua se limite destro e sinistro per $x \to 5$ esistono e sono coincidenti a $k^2 - 4k + 4$ ossia il valore di $f(x)$ calcolato con $x = 5$.

Osserviamo che se $x \to 5$ per definizione la funzione avrà la forma

$$f(x) = \frac{\sin(x^2 - 10x + 25)}{x - 5}$$

poiché calcolata su ascisse vicine ma comunque diverse dal punto $x = 5$. Si avrà quindi:

$\lim_{x \to 5^{\pm}} \dfrac{\sin(x^2 - 10x + 25)}{x - 5} = \lim_{x \to 5^{\pm}} \dfrac{\sin(x-5)^2}{x - 5} = \lim_{t \to 0^{\pm}} \dfrac{\sin(t^2)}{t} = \lim_{t \to 0^{\pm}} \dfrac{t}{t} \cdot \dfrac{sin(t^2)}{t} = \lim_{t \to 0^{\pm}} \dfrac{t \cdot sin(t^2)}{t^2} = \lim_{t \to 0^{\pm}} x \cdot \lim_{t \to 0^{\pm}} \dfrac{sin(t^2)}{t^2} = 0 \cdot 1 = 0$

Impongo la condizione $k^2 - 4k + 4 = f(5) = \lim_{x \to 5^{\pm}} f(x) = 0$ che si realizza, risolvendo l'equazione di secondo grado, per $k \in \{-2, +2\}$

$$\textbf{(c)} \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2 - 4)}{x - 2} & \text{se } x \neq 2 \\ k - 2 & \text{se } x = 2. \end{cases}$$

Operiamo come in (a) e (b) nel punto $x = 2$ calcolando $\lim_{x \to 2^{\pm}} \dfrac{\sin(x^2 - 4)}{x - 2}$ per farlo notiamo che:

(1) per $\alpha \to 0^+$ $\sin\alpha \leq \alpha$

(2) per $\alpha \to 0^-$, se $\beta = -\alpha \Rightarrow \beta \to 0^+$ e $\sin\beta \leq \beta \Rightarrow \sin -\alpha \leq -\alpha \Rightarrow -\sin\alpha \leq -\alpha \Rightarrow \sin\alpha \geq \alpha$

Da (1) si ha quindi $\lim_{x \to 2^+} \dfrac{\sin(x^2 - 4)}{x - 2} \leq \lim_{x \to 2^+} \dfrac{(x^2 - 4)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \dfrac{(x-2)(x+2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} (x + 2) = 4$

Ma anche da (2) $\lim_{x \to 2^-} \dfrac{\sin(x^2 - 4)}{x - 2} \geq 4$ il che implica per il "Teorema dei due Carabinieri" che $\lim_{x \to 2^{\pm}} f(x) = 4$

Impongo la condizione $k - 2 = f(2) = \lim_{x \to 2^{\pm}} f(x) = 4$ che si realizza per $k = 6$

Esercizio 3. Determinare insieme di definizione, segno, zeri, asintoti delle seguenti funzioni e disegnarne un grafico qualitativo:

(a) $\dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 2}$

(b) $\dfrac{x^2 - 2x - 3}{x + 2}$

(c) $\sqrt{x^2 + 2x} - x$

Soluzioni:

(a) $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 2}$

$f(x)$ è ben definita per $x \neq \pm 2$. Studiamone il segno:

NUM: $x^3 - 8 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$
DEN: $x^2 - 2 > 0 \Leftrightarrow x < -\sqrt{2}; x > \sqrt{2}$

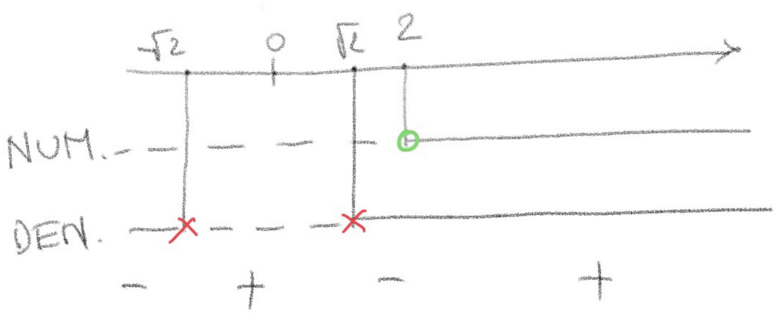

Figura 1: studio del segno della funzione

Quindi si ha $f(x) \geq 0$ per $\{x \geq 2; -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\}$

Calcoliamo i vari ASINTOTI, svolgiamo solo il primo limite, gli altri usano tecniche di risoluzione identiche.

ORIZZONTALI:

$\lim_{x\to\pm\infty} = \dfrac{x^3-8}{x^2-2} = \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{1-\dfrac{8}{x^3}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}} = \pm\infty$ che potrebbe implicare la presenza di asintoti obliqui

OBLIQUI

cerchiamo l'eventuale retta obliqua nella forma $y = mx + q$ dove

$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$
$q = \lim_{x\to\infty}(x) - x = 0$

quindi l'asintoto obliquo è $y = x$

VERTICALI

Sono presenti delle singolarità per $x = \pm\sqrt{2}$, si verifica che:

$\lim_{x\to\sqrt{2}^+} = -\infty$
$\lim_{x\to\sqrt{2}^-} = +\infty$
$\lim_{x\to-\sqrt{2}^+} = +\infty$
$\lim_{x\to-\sqrt{2}^-} = -\infty$

Per poter graficare qualitativamente la funzione, cerchiamo le intersezioni di $f(x)$ con gli assi x e y, cioé:

$f(0) = 4$
$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Con quanto studiato in precedenza possiamo realizzare quanto segue, ricordando che si tratterà di una rappresentazione qualitativa:

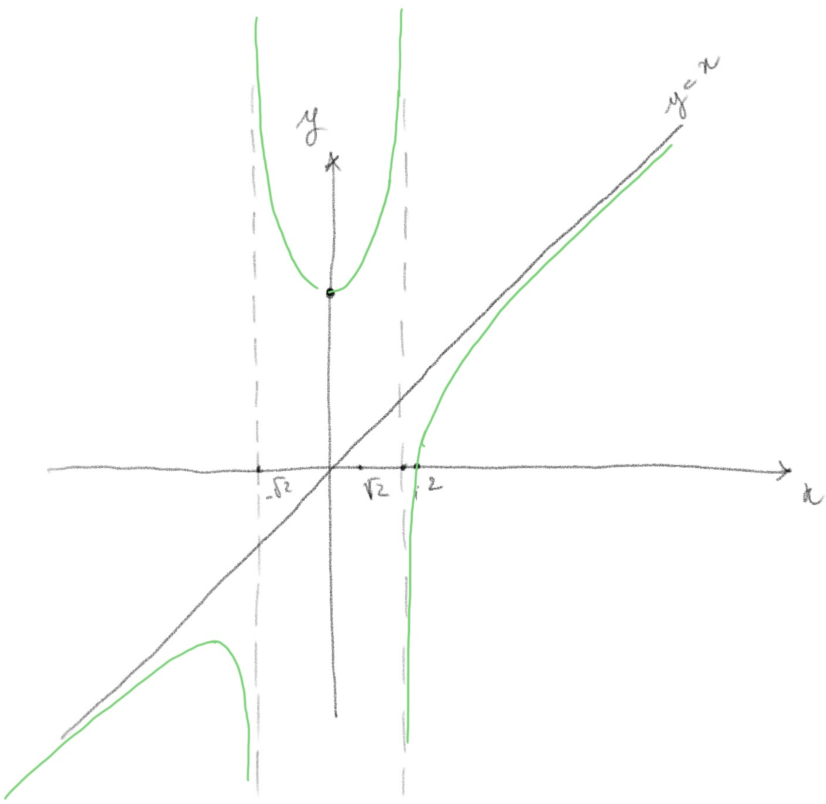

Figura 2: grafico qualitativo della funzione

(b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x + 2}$

$f(x)$ è ben definita per $x \neq -2$. Studiamone il segno:

NUM: $x^2 - 2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1; x \geq 3$
DEN: $x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$

Quindi si ha $f(x) \geq 0$ per $\{-1 \leq x < -2; x \geq 3\}$

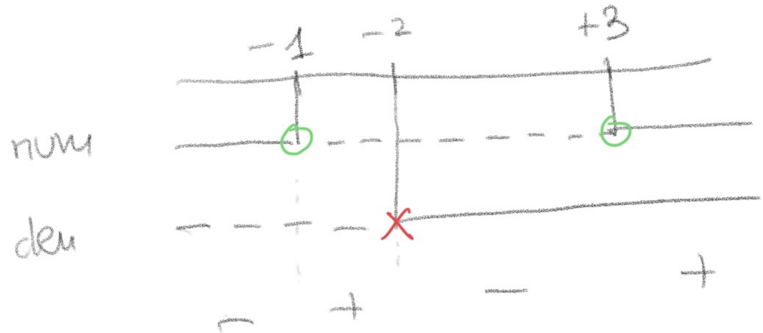

Figura 3: studio del segno della funzione

Calcoliamo i vari ASINTOTI, svolgiamo solo il primo limite, gli altri usano tecniche di risoluzione identiche.

ORIZZONTALI:

$\lim_{x\to\pm\infty} = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x + 2} = \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{1 - \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x^2}}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2}} = \pm\infty$ che potrebbe implicare la presenza di asintoti obliqui

OBLIQUI

cerchiamo l'eventuale retta obliqua nella forma $y = mx + q$ dove

$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$
$q = \lim_{x\to\infty}(x) - x = -4$

quindi l'asintoto obliquo è $y = x - 4$

VERTICALI

E' presente una singolarità per $x = -2$, si verifica che:

$\lim_{x\to -2^+} = +\infty$
$\lim_{x\to -2^-} = -\infty$

Per poter graficare qualitativamente la funzione, cerchiamo le intersezioni di $f(x)$ con gli assi x e y, cioé:

$f(0) = -\dfrac{3}{2}$
$f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1, 3\}$

Con quanto studiato in precedenza possiamo realizzare quanto segue, ricordando che si tratterà di una rappresentazione qualitativa:

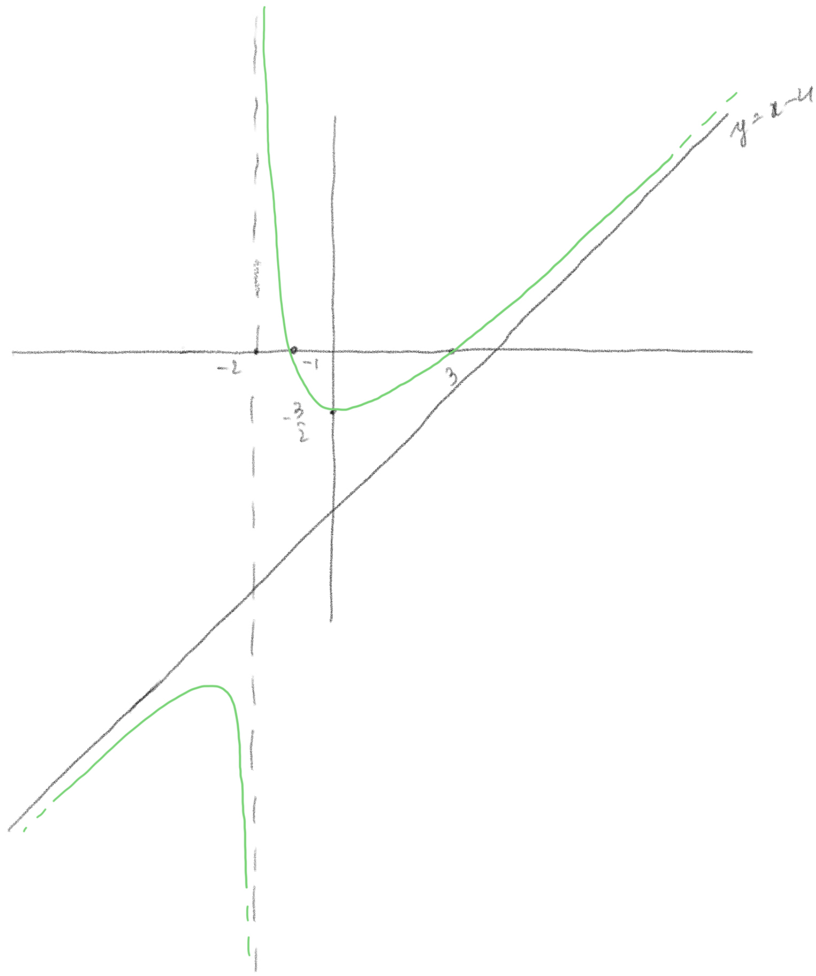

Figura 4: grafico qualitativo della funzione

(c) $f(x) = \sqrt{x^2+2x} - x$

$f(x)$ è ben definita in $\mathbb{R}$ se $x^2 + 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -2; x \geq 0$. Inoltre la funzione è sempre positiva e continua nel suo dominio di definizione.
Si ha infatti:

$\lim_{x\to -2^-} f(x) = f(-2) = 2$
$\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0$

Calcoliamo i vari ASINTOTI, svolgiamo solo il primo limite, gli altri usano tecniche di risoluzione identiche.

ORIZZONTALI:

$$\lim_{x\to+\infty} = \sqrt{x^2+2x} - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x}+x}{\sqrt{x^2+2x}+x} \cdot (\sqrt{x^2+2x} - x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x \cdot \sqrt{1+\frac{2}{x}}+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1} = \frac{2}{2} = 1$$

Ossia la funzione ha un assintoto orizzontale in $y = 1$ per $x \to +\infty$.
Si verifica inoltre che $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ cioè la possibile presenza di asintoti obliqui.

OBLIQUI:

cerchiamo l'eventuale retta obliqua nella forma $y = mx + q$ dove

$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = -2$
$q = \lim_{x\to\infty}(x) - x = -1$

quindi l'asintoto obliquo è $y = -2x - 1$

Per poter graficare qualitativamente la funzione, cerchiamo le intersezioni di $f(x)$ con gli assi x e y, cioé:

$$f(0) = 0$$
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Con quanto studiato in precedenza possiamo realizzare quanto segue, ricordando che si tratterà di una rappresentazione qualitativa:

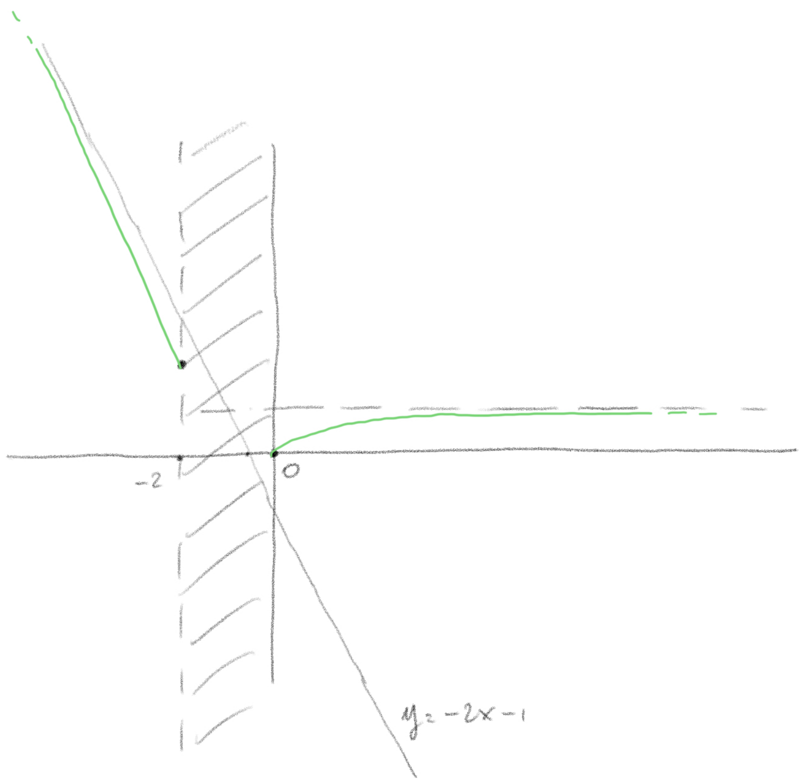

Figura 5: grafico qualitativo della funzione