UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Dipartimento di Architettura - Istituzioni di Matematiche I - aa 2020-2021

Proff. C. Falcolini, P. Magrone

Esercitazione del 03-12-2020

dott. arch. F. Morera

Esercizio 1. Determinare insieme di definizione, segno, zeri, asintoti, massimi e minimii delle seguenti funzioni e disegnarne un grafico qualitativo:

(a) $\dfrac{x}{x^3-1}$

(b) $\dfrac{x^3}{x^2-2}$

(c) $\sqrt{x}\cdot\log^2 x$

(d) $x^3\cdot\log|x|$

(e) $x\cdot e^{\frac{x+2}{x-1}}$

(f) $e^x\cdot\sqrt{\dfrac{x+3}{x-2}}$

SOLUZIONI

(a) $\dfrac{x}{x^3-1}$

$f(x)$ è ben definita in $\mathbb{R}$ se $x^3-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$;
Valutiamo il segno di $f(x)$

NUM $\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 0$;
DEN $> 0 \Leftrightarrow x > 1$

Si ha quindi $f(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 0; x>0$

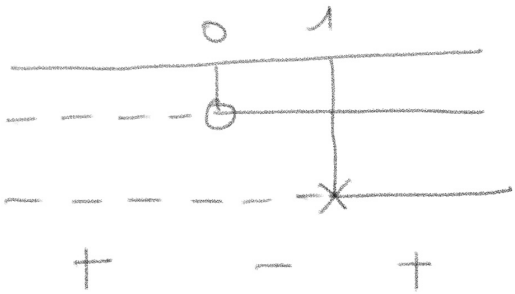

Figura 1: esercizio (a), segno di f(x)

Calcoliamo i vari ASINTOTI, svolgiamo solo il primo limite, gli altri usano tecniche di risoluzione identiche.

VERTICALI:
Abbiamo una singolarità per $x = 1$ e si verifica facilmente che:

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$
$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$

ORIZZONTALI:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^3-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^3}} = \frac{0}{1} = 0$$

Ossia la funzione ha un assintoto orizzontale in $y = 0$ per $x \to \pm\infty$.
Si osserva quindi che non ci sono asintoti obliqui.

MAX/min/Staz.

Calcoliamo e studiamo la derivata prima d $f(x)$

$$f'(x) = -\frac{2x^3+1}{(x^3-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \quad \text{con} \quad f(-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}) = \frac{2\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}{3}$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -2x^3 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

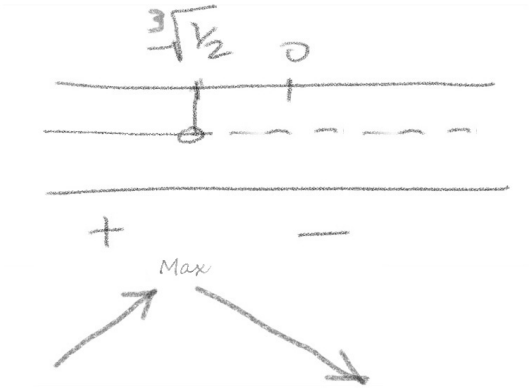

Figura 2: esercizio (a), segno di f'(x)

Dal segno di $f'(x)$ ricaviamo che $f(x)$ è crescente a sinistra di $x = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ mentre decresce alla sua destra. Il punto analizzato risulta quindi un massimo relativo per $f(x)$

INTERSEZIONI

Per poter graficare qualitativamente la funzione, cerchiamo le intersezioni di $f(x)$ con gli assi x e y, cioé:

$f(0) = 0$ intersezioni con l'asse delle x
$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ intersezione con l'asse delle y

GRAFICO

Con quanto studiato in precedenza possiamo realizzare quanto segue, ricordando che si tratterà di una rappresentazione qualitativa:

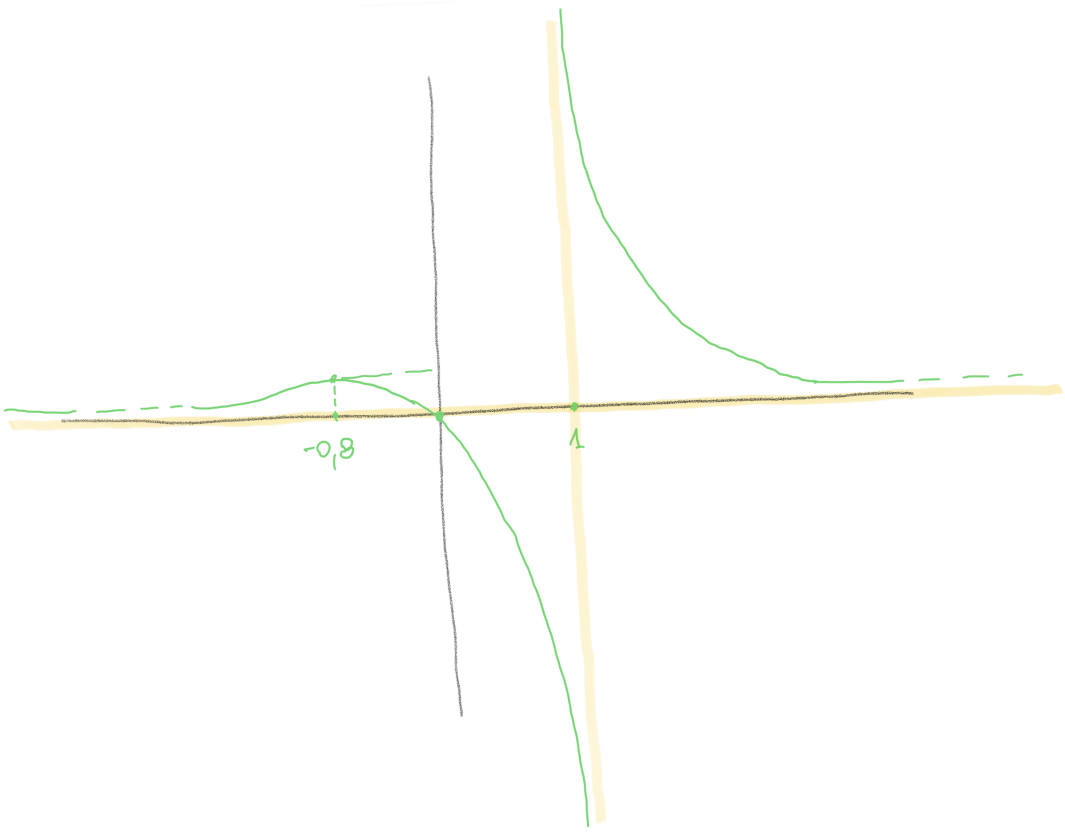

Figura 3: esercizio (a), grafico di f(x)

(b) $\dfrac{x^3}{x^2-2}$

$f(x)$ è ben definita in $\mathbb{R}$ se $x^2 - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm\sqrt{2}$;

Valutiamo il segno di $f(x)$

NUM $\geq \Leftrightarrow x^3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$;
DEN $> 0 \Leftrightarrow x < -\sqrt{2}; x > \sqrt{2}$

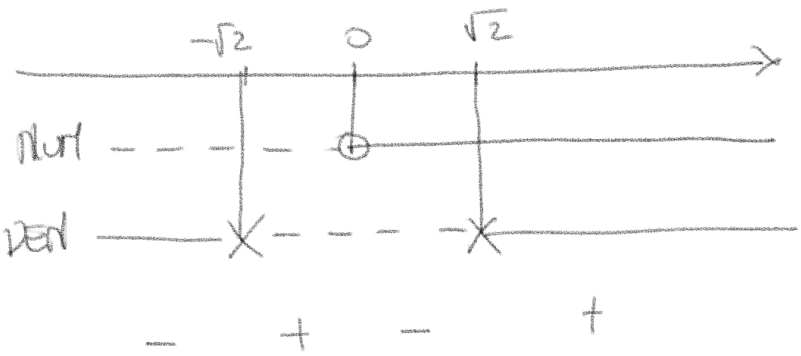

Figura 4: esercizio (b), segno di f(x)

Si ha quindi $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < x \leq 0; x > \sqrt{2}$

Calcoliamo i vari ASINTOTI, svolgiamo solo il primo limite, gli altri usano tecniche di risoluzione identiche.

VERTICALI:
Abbiamo due singolarità per $x = \pm\sqrt{2}$ e si verifica facilmente che:

$\lim_{x\to\sqrt{2}^+} f(x) = +\infty$
$\lim_{x\to\sqrt{2}^-} f(x) = -\infty$
$\lim_{x\to-\sqrt{2}^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to-\sqrt{2}^-} f(x) = -\infty$

ORIZZONTALI:

$\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3}{x^2-2} = \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{\dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^3}} = \dfrac{1}{0} = \pm\infty$

Potrebbero quindi esserci asintoti obliqui. Calcoliamoli:

OBLIQUI

$m = \lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x^2-2} = 1$

esiste quindi un asintoto obliquo della forma $y = mx + q$ dove

$q = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{x^2-2} - x = \lim_{x\to\infty} \dfrac{2x}{x^2-2} = 0$

l'asintoto ha quindi equazione $y = x$

MAX/min/Staz.

Calcoliamo e studiamo la derivata prima d $f(x)$

$f'(x) = \dfrac{x^2(x^2-6)}{(x^2-2)^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2-6) \Leftrightarrow x = 0; x = \pm\sqrt{6}$

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -\sqrt{6}; x \geq \sqrt{6}$

Dal segno di $f'(x)$ ricaviamo che $f(x)$ è sempre decrescente nell'intervallo $-\sqrt{6} \leq x \leq \sqrt{6}$ cosa che implica un punto di flesso orizzontale in $x = 0$. Mentre i punti $x = -\sqrt{6}$ e $x = \sqrt{6}$ sono un massimo e un minimo relativo rispettivamente.

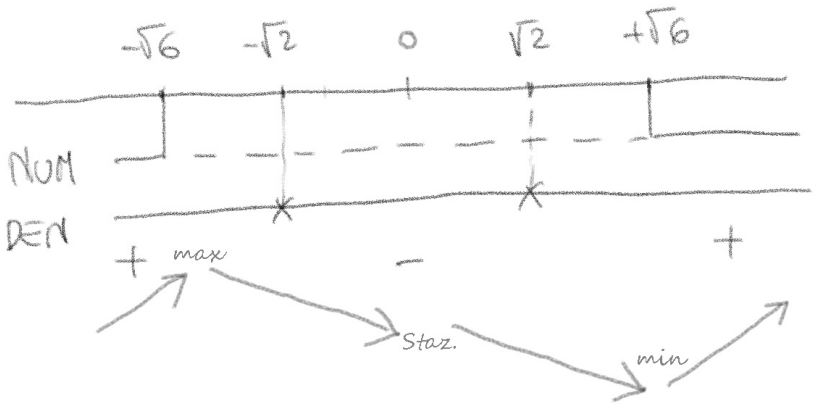

Figura 5: esercizio (b), segno di f'(x)

INTERSEZIONI

Per poter graficare qualitativamente la funzione, cerchiamo le intersezioni di $f(x)$ con gli assi x e y, cioé:

$f(0) = 0$ intersezioni con l'asse delle x
$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ intersezione con l'asse delle y

GRAFICO

Con quanto studiato in precedenza possiamo realizzare quanto segue, ricordando che si tratterà di una rappresentazione qualitativa:

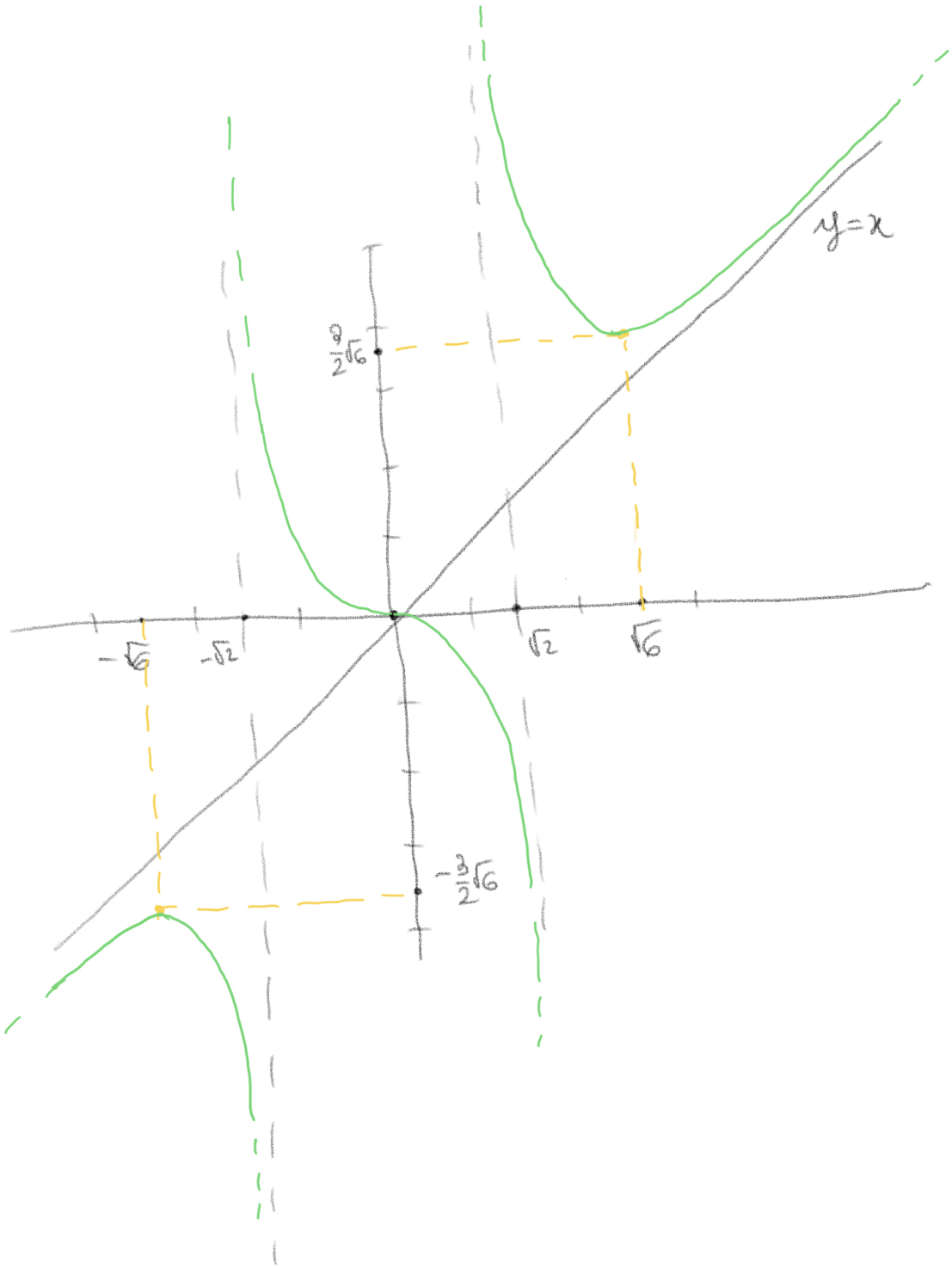

Figura 6: esercizio (b), grafico di f(x)

(c) $\sqrt{x} \cdot \log^2 x$

La soluzione verrà data nella prossima esercitazione;

(d) $x^3 \cdot \log|x|$

$f(x)$ è ben definita in $\mathbb{R}$ se $x \neq 0$

Valutiamo il segno di $f(x)$

i) $x^3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$;
ii) $\ln|x| \geq 0 \Leftrightarrow e^{\ln|x|} \geq e^0 \Leftrightarrow |x| \geq 1 \Leftrightarrow x \leq - \; x \geq 1$

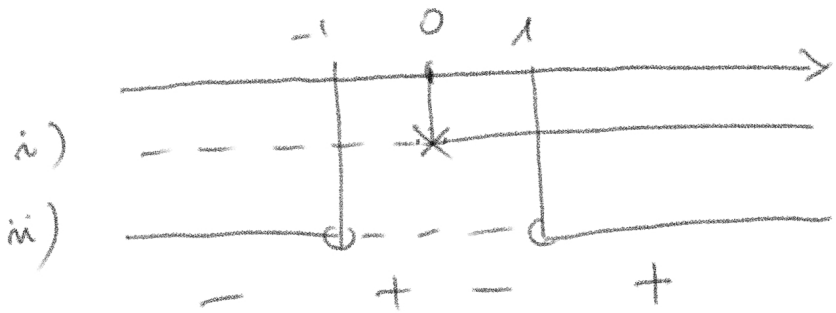

Figura 7: esercizio (d), segno di f(x)

Si ha quindi $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x < 0; x \geq 1$

Calcoliamo i vari ASINTOTI, svolgiamo solo il primo limite, gli altri usano tecniche di risoluzione identiche.

VERTICALI:
Abbiamo una forma indeterminata $(0 \cdot -\infty)$ in $x = 0$ e si verifica, grazie al

limite notevole $\lim_{x\to 0} x^r \log_a x = 0 \quad \forall r > 0; a > 0; a \neq 1$, che:

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$
$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$

ORIZZONTALI:

Si verifica anche senza grandi difficoltà che: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$

Potrebbero quindi esserci asintoti obliqui. Calcoliamoli:

OBLIQUI

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 \cdot \log|x|}{x} = \lim_{x\to\infty} x^2 \cdot \log|x| = \infty$$

non esistono quindi asintoti obliqui.

MAX/min/Staz.

Calcoliamo e studiamo la derivata prima d $f(x)$

$f'(x) = x^2 \cdot (3\ln|x| + 1)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3\ln|x| + 1 = 0 \Leftrightarrow e^{\ln|x|} = e^{-\frac{1}{3}} \Leftrightarrow |x| = \frac{1}{\sqrt[3]{e}} \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$$

NB: $x = 0$ non è ammessa come radice perché in questo caso anche $f('(x)$ ha lo stesso dominio di definizione di $f(x)$
$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{\sqrt[3]{e}}; x \geq \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$

NB: la componenete x^2 non interviene nello studio del segno perché sempre positiva.

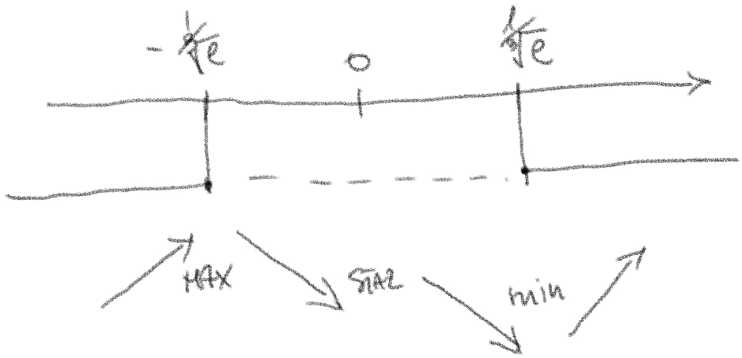

Figura 8: esercizio (d), segno di f'(x)

Dal segno di $f'(x)$ ricaviamo che $f(x)$ è sempre decrescente nell'intervallo $-\frac{1}{\sqrt[3]{e}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$ cosa che implicherebbe un punto di flesso orizzontale in $x = 0$ che però non appartiene al dominio di $f(x)$. In quel punto $f(x)$ si comporta però come se avesse essenzialmente un punto stazionario avendo $f'(x) \to 0$ con $x \to 0$.

I punti $x = -\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$ e $x = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$ sono invece un massimo e un minimo relativo rispettivamente.

INTERSEZIONI

Per poter graficare qualitativamente la funzione, cerchiamo le intersezioni di $f(x)$ con gli assi x e y, cioé:

$x = 0$ non appartiene all'indieme di definizione di $f(x)$, ma abbiamo comunque: $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ come visto in precedenza
$f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln|x| = 0 \Leftrightarrow e^{\ln|x|} = e^0 \Leftrightarrow |x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$ che invece rappresentano le intersezioni di $f(x)$ con l'asse delle y

GRAFICO

Con quanto studiato in precedenza possiamo realizzare quanto segue, ricordando che si tratterà di una rappresentazione qualitativa:

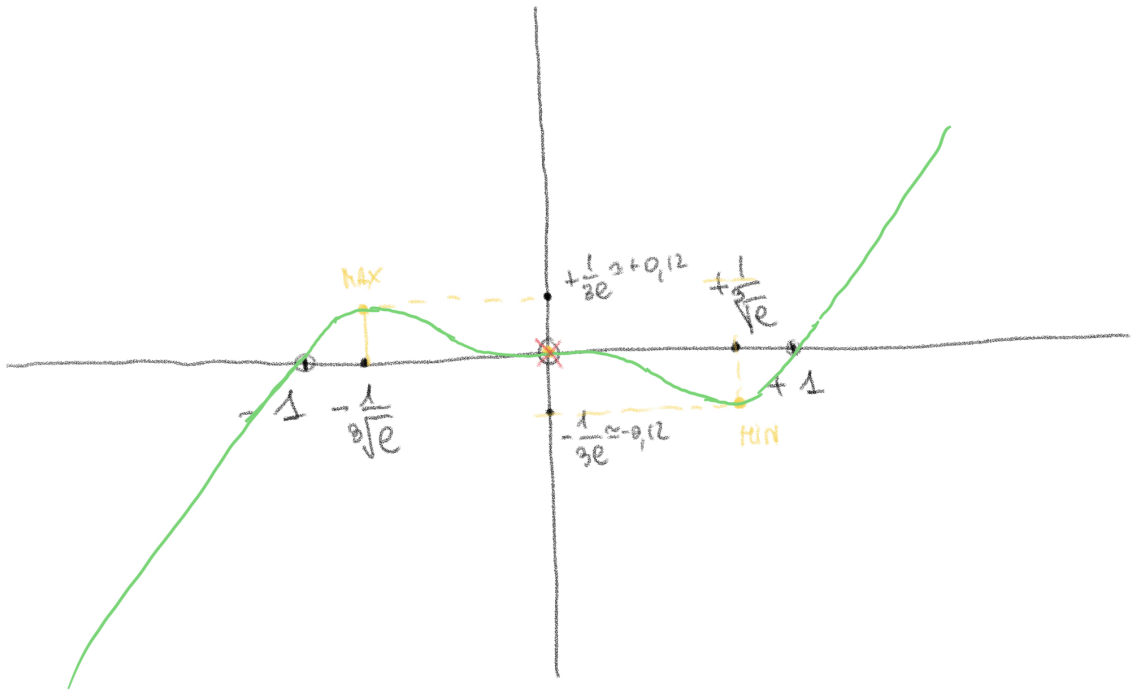

Figura 9: esercizio (d), grafico di f(x)

(e) $x \cdot e^{\frac{x+2}{x-1}}$

La soluzione verrà data nella prossima esercitazione;

(f) $e^x \cdot \sqrt{\frac{x+3}{x-2}}$

La soluzione verrà data nella prossima esercitazione;