Esercitazione 2

A. Giarnetti

- **Esercizio 1.** Calcolare insieme di definizione, segno, zeri e limiti per $x \to 6^+, 6^-, 3^+, +\infty$ della funzione

$$\frac{\sqrt{x-3}+\sqrt{x^2-4}}{x-6} \tag{1}$$

SOLUZIONE

1) Per quanto riguarda l'insieme di definizione dobbiamo tenere in conto di tre condizioni: le due radici devono essere positive (o nulle, poichè al numeratore) e il denominatore deve essere diverso da zero. Abbiamo quindi

$$\begin{cases} x-3 \geq 0 \longrightarrow x \geq 3 \\ x^2-4 \geq 0 \longrightarrow x \leq -2 \vee x \geq 2 \\ x-6 \neq 0 \longrightarrow x \neq 6 \end{cases} \tag{2}$$

L'intersezione tra le tre condizioni ci dice che il dominio della funzione è

$$x \in [3,6) \cup (6,+\infty) \tag{3}$$

2) Consideriamo ora il segno. Le due radici sono sempre positive. Di conseguenza il segno sarà dettato dal segno del denominatore. Quindi la funzione sarà positiva per $x > 6$ e negativa per $x < 6$.

3) Dato che il denominatore è sempre maggiore uguale di zero, la funzione potrà avere degli zeri solo se esistono valori per i quali si annullano contemporaneamente entrambe le radici. Poichè la prima è zero per $x = 3$, mentre la seconda lo è per $x = \pm 2$, la funzione non ha zeri.

4) Calcoliamo i limiti

$$\lim_{x->6^-} \frac{\sqrt{x-3}+\sqrt{x^2-4}}{x-6} = -\infty \tag{4}$$

poichè in $x = 6$ il numeratore è finito e il denominatore è negativo per valori di $x < 6$.

$$\lim_{x->6^+} \frac{\sqrt{x-3}+\sqrt{x^2-4}}{x-6} = +\infty \tag{5}$$

per un ragionamento simile al precedente.

$$\lim_{x->3^+} \frac{\sqrt{x-3}+\sqrt{x^2-4}}{x-6} = -\frac{\sqrt{5}}{3} \tag{6}$$

per semplice sostituzione.

$$\lim_{x->+\infty} \frac{\sqrt{x-3}+\sqrt{x^2-4}}{x-6} = \lim_{x->+\infty} \frac{|x|\left(\sqrt{1/x-3/x^2}+\sqrt{1-4/x^2}\right)}{x(1-6/x)} = 1 \tag{7}$$

tenendo conto che per x che va a $+\infty$ la x è positiva e quindi $|x| = x$.

- **Esercizio 2.** Calcolare insieme di definizione, segno, zeri e limite per $x \to +\infty$ della funzione

$$\frac{\sqrt{x^3 - 2x^2 - x + 2}}{x^2 + 1} \tag{8}$$

SOLUZIONE

1) Dato che il denominatore è sempre strettamente positivo, allora l'unica condizione da risolvere è che il radicando sia maggiore o uguale a zero. Per prima cosa scomponiamo il numeratore. Tramite il metodo di Ruffini, raccoglimento parziale o divisione di polinomi possiamo notare come

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x + 1)(x - 1)(x - 2) \tag{9}$$

Facciamo lo studio del segno di questo polinomio.

- Per $x < -1$ i tre fattori sono tutti e tre negativi. Quindi il radicando è negativo.
- Per $-1 < x < 1$ il primo fattore è positivo, gli altri due sono negativi. Quindi il radicando è positivo.
- Per $1 < x < 2$ i primi due fattori sono positivi, mentre il terzo è negativo. Quindi il radicando è negativo.
- Per $x > 2$ tutti i fattori sono positivi, quindi il radicando è positivo.

Deduciamo quindi che il dominio della funzione è

$$x \in [-1, 1] \cup [2, +\infty) \tag{10}$$

2) La funzione è sempre positiva, essendo il numeratore una radice e il denominatore una funzione strettamente positiva.

3) Gli zeri della funzione sono gli zeri del numeratore, che sono, come si può vedere dalla scomposizione, $x = -1, x = 1, x = 2$.

4) Calcoliamo adesso il limite:

$$\lim_{x->+\infty} \frac{\sqrt{x^3 - 2x^2 - x + 2}}{x^2 + 1} = \lim_{x->+\infty} \frac{|x|^{3/2}\sqrt{1 - 2/x - x/x^2 + 2/x^2}}{x^2(1 + 1/x^2)} = 0 \tag{11}$$

- **Esercizio 3.** Calcolare insieme di definizione, segno, zeri e limiti per $x \to 0^{\pm}, -1^{\pm}, \pm\infty$ della funzione
$$\frac{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2}{x^2 + x} \tag{12}$$

  SOLUZIONE

  2) L'unica condizione di esistenza della funzione è che il denominatore sia diverso da zero. Scomponendolo $x^2 + x = x(x+1)$ otteniamo che il dominio è
  $$x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, +\infty) \tag{13}$$

  1) Scomponiamo come in precedenza il numeratore. Otteniamo
  $$x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2 = (x-1)^2(x^2+2) \tag{14}$$
  che è una funzione sempre positiva. Il segno della funzione sarà quindi dato dal segno del denominatore. Questo, data la scomposizione vista precedentemente sarà
     - Per $x < -1$ entrambi i fattori sono negativi. Quindi la funzione è positiva.
     - Per $-1 < x < 0$ un fattore è negativo, l'altro positivo. Quindi la funzione è negativa.
     - Per $x > 0$ entrambi i fattori, e quindi la funzione, sono positivi.

  3) Data la scomposizione del denominatore, l'unico zero si trova in $x = 1$.

  4) Calcoliamo i limiti
  $$\lim_{x->-1^-} \frac{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2}{x^2 + x} = +\infty \tag{15}$$
  poichè il numeratore è positivo e il denominatore anche per valori di x minori di -1.
  $$\lim_{x->-1^+} \frac{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2}{x^2 + x} = -\infty \tag{16}$$
  per un ragionamento simile al precedente.
  $$\lim_{x->0^-} \frac{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2}{x^2 + x} = -\infty \tag{17}$$
  $$\lim_{x->0^+} \frac{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2}{x^2 + x} = +\infty \tag{18}$$
  $$\lim_{x->-\infty} \frac{x^4(1 - 2/x + 3/x^2 - 4/x^3 + 2/x^4}{x^2(1 + 1/x)} = +\infty \tag{19}$$
  $$\lim_{x->+\infty} \frac{x^4(1 - 2/x + 3/x^2 - 4/x^3 + 2/x^4}{x^2(1 + 1/x)} = +\infty \tag{20}$$

- **Esercizio 4.** Calcolare insieme di definizione, segno, zeri e limiti per $x \to -6^-, +\infty$ della funzione
$$\frac{2x-2}{\sqrt{x^2+5x-6}} \tag{21}$$

SOLUZIONE

1) Imponiamo che il radicando sia strettamente maggiore di zero (essendo al denominatore non può essere uguale a zero). Dato che il polinomio di secondo grado ha 1 e -6 come radici, il radicando sarà positivo quando $x < -6$ e $x > 1$. Potremmo quindi pensare che il dominio sia $x \in (-\infty, -6) \cup (1, +\infty)$. Tuttavia in x=1 non si annulla solo il denominatore ma anche il numeratore. Abbiamo quindi una forma indeterminata e dobbiamo controllare il limite
$$\lim_{x\to 1^+} \frac{2x-2}{\sqrt{x^2+5x-6}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2(x-1)}{\sqrt{(x-1)(x+6)}} = \lim_{x\to 1^+} 2\sqrt{\frac{x-1}{x+6}} = 0 \tag{22}$$
dato che il limite è zero, la funzione esiste nel punto x=1. Quindi il dominio della funzione è
$$x \in (-\infty, -6) \cup [1, +\infty) \tag{23}$$
2) Dato che il denominatore è sempre positivo, il segno della funzione sarà determinato dal segno del numeratore. Quindi per $x > 1$ la funzione sarà positiva, mentre per $x < -6$ la funzione sarà negativa.
3) Come già visto in precedenza, x=1 è uno (e l'unico) zero della funzione.
4) Per quanto riguarda i limiti
$$\lim_{x\to -6^-} \frac{2x-2}{\sqrt{x^2+5x-6}} = -\infty \tag{24}$$
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x(2-2/x)}{|x|\sqrt{1+5x/x-6/x^2}} = 2 \tag{25}$$

- **Esercizio 5.** Calcolare insieme di definizione, segno, zeri e limiti per $x \to 2^-, +\infty$ della funzione

$$\frac{\sqrt[3]{x^2-4}}{\sqrt{x^3-4x^2+x+6}} \tag{26}$$

SOLUZIONE

1) La radice cubica esiste sempre, anche se il radicando è negativo. Invece per la radice quadrata al denominatore dobbiamo imporre il fatto che essa sia strettamente positiva. Scomponendo il polinomio troviamo che

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x+1)(x-2)(x-3) \tag{27}$$

Abbiamo i seguenti casi:

- Per $x < -1$ tutti i fattori sono minori di zero, quindi il radicando è negativo
- Per $-1 < x < 2$ il primo fattore è positivo, mentre gli altri due sono negativi. Il radicando è positivo.
- Per $2 < x < 3$ i primi due fattori sono positivi mentre il terzo è negativo. Il radicando è negativo.
- Per $x > 3$ tutti i fattori e quindi anche il polinomio nella sua interezza è positivo.

L'insieme di definizione dovrebbe allora essere $x \in (-1,2) \cup (3,+\infty)$. Tuttavia in x=2, come nel caso precedente, si annulla anche il numeratore. Quindi dobbiamo controllare il limite.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2^-} \frac{\sqrt[3]{x^2-4}}{\sqrt{x^3-4x^2+x+6}} &= \lim_{x\to 2^-} \frac{-|x-2|^{1/3}\sqrt[3]{x+2}}{|x-2|^{1/2}\sqrt{-(x+1)(x-3)}} = \\ &= \lim_{x\to 2^-} \frac{-\sqrt[3]{x+2}}{|x-2|^{1/6}\sqrt{-(x+1)(x-3)}} = -\infty\end{aligned} \tag{28}$$

dove abbiamo considerato sia al numeratore che al denominatore che, per valori della x minori di 2, $x-2<0$ e dunque $|x-2| = -(x-2)$. A differenza del caso precedente, quindi, x=2 non fa parte del dominio della funzione poichè il limite è infinito. Quindi il dominio è

$$x \in (-1,2) \cup (3,+\infty) \tag{29}$$

2) Dato che il denominatore è sempre positivo, il segno della funzione sarà dettato dal numeratore. Quindi la funzione sarà positiva per $x > 3$ e negativa per $-1 < x < 2$.

3) Gli zeri della funzione dovrebbero essere gli zeri del numeratore, ovvero $x = -2$ e $x = 2$. Tuttavia, in $x = -2$ la funzione non esiste, mentre come abbiamo visto la funzione in $x = 2$ diverge.

4) Controlliamo l'unico limite che rimane

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{2/3}\sqrt[3]{1-4/x^2}}{x^{3/2}\sqrt{1-4/x+1/x^2+6/x^3}} = 0 \tag{30}$$

- **Esercizio 6.** Calcolare insieme di definizione, segno e zeri della funzione

$$2 - e^{-x^2+2x} \tag{31}$$

SOLUZIONI

1) L'insieme di definizione è l'insieme dei numeri reali, poichè la funzione esponenziale esiste sempre.

2) Per trovare il segno della funzione dobbiamo risolvere la disequazione

$$2 - e^{-x^2+2x} > 0 \tag{32}$$

Possiamo applicare il logaritmo ad entrambi i membri. Dato che il logaritmo è una funzione monotona crescente, non cambia il segno della disequazione. Otteniamo dunque che

$$\ln 2 > -x^2 + 2x \tag{33}$$

Questa è una semplice equazione di secondo grado. Risolvendola otteniamo che la funzione sarà positiva quando

$$x < 1 - \sqrt{1 - \ln 2} \quad \vee \quad x > 1 + \sqrt{1 - \ln 2} \tag{34}$$

e negativa altrimenti

3) Gli zeri della funzione possono essere visti come i punti in cui la funzione cambia di segno. Saranno quindi due, ovvero i punti

$$x = 1 \pm \sqrt{1 - \ln 2} \tag{35}$$

- **Esercizio 7.** Calcolare insieme di definizione, segno e zeri della funzione

$$e^{-x^2} - e^{3x} \tag{36}$$

SOLUZIONI

1) Come nel caso precedente l'insieme di definizione è l'insieme dei numeri reali.
2) Per trovare il segno usiamo lo stesso metodo visto in precedenza, ovvero

$$e^{-x^2} - e^{3x} > 0 \tag{37}$$

che diventa, applicando il logaritmo

$$-x^2 > 3x \tag{38}$$

Questa è una disequazione di secondo grado, la quale, rendendo positivo il coefficiente del termine quadratico, si può scrivere come $x^2 + 3x < 0$. Risolvendo quest'ultima otteniamo che l'intera funzione sarà positiva per

$$-3 < x < 0 \tag{39}$$

e negativa altrimenti.
3) Gli zeri sono i punti in cui la funzione cambia segno, ovvero $x = -3$ e $x = 0$.

- **Esercizio 8.** Calcolare insieme di definizione, segno e zeri della funzione

$$e^{-x^2(x-1)} - e^{-4x+4} \tag{40}$$

SOLUZIONI

1) L'insieme di definizione è quello dei numeri reali.
2) Per studiare il segno risolviamo

$$e^{-x^2(x-1)} - e^{-4x+4} > 0 \tag{41}$$

che applicando il logaritmo diventa

$$-x^3 + x^2 > -4x + 4 \tag{42}$$

Otteniamo quindi una disequazione di terzo grado, ovvero $x^3 - x^2 - 4x + 4 < 0$. Scomponendo il polinomio otteniamo

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x + 2)(x - 1)(x - 2) \tag{43}$$

Studiamo il segno di questo polinomio.

- Per $x < -2$ tutti i fattori e quindi il polinomio intero sono negativi.
- Per $-2 < x < 1$ il primo fattore è positivo, gli altri due negativi. Il polinomio è quindi positivo.
- Per $1 < x < 2$ i primi due fattori sono positivi, il terzo negativo, quindi il polinomio è negativo.
- Per $x > 2$ tutti i fattori e quindi il polinomio intero sono positivi.

La disequazione $x^3 - x^2 - 4x + 4 < 0$ avrà dunque come soluzioni $x < -2$ e $1 < x < 2$. Quindi avremo che la funzione originaria sarà positiva *(ricordate che all'inizio la nostra disequazione era stata scritta per trovare valori positivi della funzione! Solo dopo aver fatto un cambio di segno la disequazione ha cambiato verso)* per

$$x < -2 \quad \vee \quad 1 < x < 2 \tag{44}$$

e negativa altrimenti.

3) Gli zeri li avremo quando $x = -2$, $x = 1$ e $x = 2$.