Esercitazione 3

A. Giarnetti

- **Funzione 1.**

$$f(x) = \left| \frac{x-2}{x-1} \right| \tag{1}$$

SOLUZIONE

- *Dominio.* Per prima cosa consideriamo il dominio. L'unica limitazione è sul denominatore che non può essere uguale a zero. Quindi il dominio è l'intero insieme dei numeri reali tranne $x = 1$.
- *Segno.* La funzione, essendo un modulo sarà sempre positiva.
- *Zeri e intersezioni con gli assi.* Gli zeri della funzione sono gli zeri del numeratore. In questo caso abbiamo solo $x = 2$. Per quanto riguarda i punti in cui la funzione attraversa l'asse y, dobbiamo vedere quanto vale la funzione quando l'ascissa è nulla. In questo caso abbiamo che la funzione incontra l'asse y in $y = 2$.
- *Asintoti e limiti.* Calcoliamo i limiti interessanti. Per $x = 1$ otteniamo

$$\lim_{x \to 1^{\pm}} \left| \frac{x-2}{x-1} \right| = +\infty \tag{2}$$

Abbiamo quindi un **asintoto verticale**.
Per i limiti all'infinito abbiamo invece

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left| \frac{x-2}{x-1} \right| = \lim_{x -> \pm\infty} \left| \frac{1-2/x}{1-1/x} \right| = 1 \tag{3}$$

Quindi $y = 1$ sarà un **asintoto orizzontale** destro e sinistro.

- *Massimi e minimi.* Il modulo non è una funzione derivabile ovunque. Infatti nei punti in cui la funzione senza il modulo cambierebbe il suo segno le derivate destra e sinistra non sono uguali. Consideriamo quindi il segno della funzione senza il modulo. Questa, dato che il numeratore è positivo per $x > 2$ e il denominatore lo è per $x > 1$, sarà positiva quando $x < 1$ e $x > 2$, negativa tra i due valori. Quindi la nostra funzione compresa del modulo si potrà scrivere come

$$\begin{cases} \frac{x-2}{x-1} & per\ x < 1 \vee x > 2 \\ \frac{x-2}{1-x} & per\ 1 < x < 2 \end{cases} \tag{4}$$

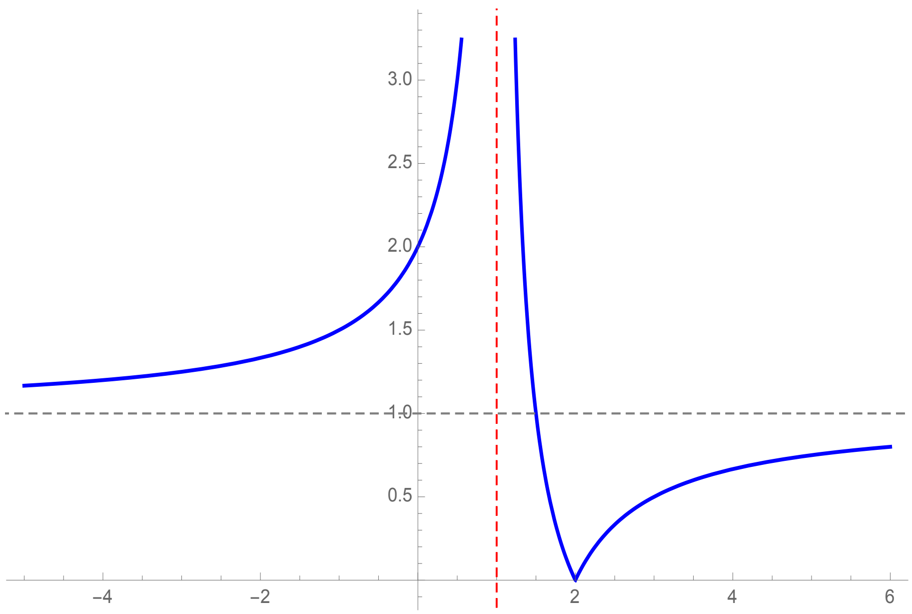
Possiamo allora fare la derivata nelle due regioni. Nelle regioni esterne abbiamo

$$f'(x) = \frac{(x-1)-(x-2)}{(x-1)^2} = \frac{1}{(x-1)^2} \tag{5}$$

che è sempre positiva. Per $x < 1$ e $x > 2$ la funzione sarà dunque sempre crescente. Nella regione interna abbiamo invece che la derivata diventa

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} \tag{6}$$

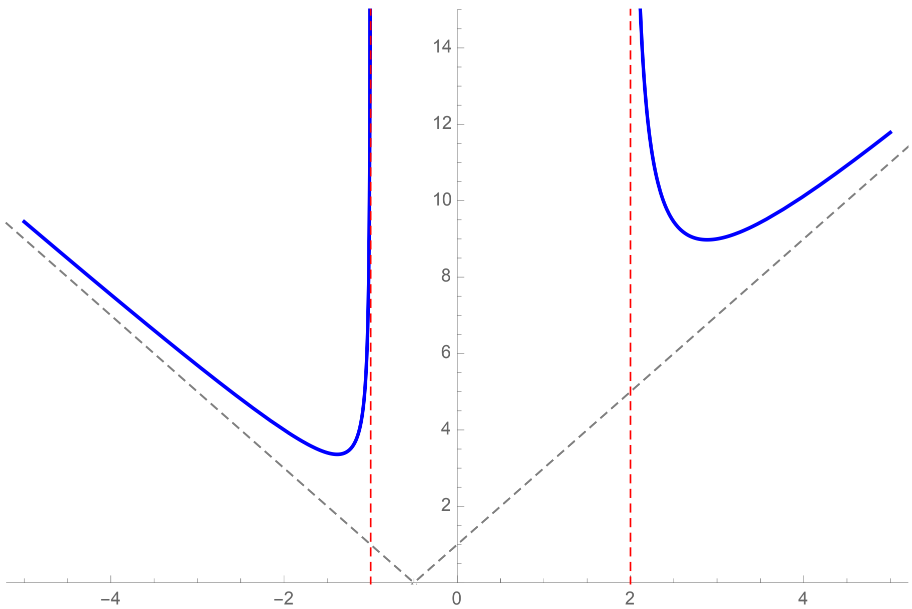
che è sempre negativa, quindi la funzione in questa regione è decrescente.
Vediamo cosa succede alla derivata destra e sinistra nel punto $x = 2$ in cui la funzione esiste e cambia forma a causa del modulo. Da sinistra la derivata vale $f'(2^-) = -1$ e da destra vale $f'(2^+) = 1$. Abbiamo quindi una discontinuità nella derivata che fa sì che il punto $x = 2$ sia un **punto angoloso**.



- **Funzione 2.**

$$f(x) = \frac{2x^2}{\sqrt{x^2 - x - 2}} \tag{7}$$

SOLUZIONE



- **Funzione 3.**

$$f(x) = \frac{x^2 - 6x + 9}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} \tag{8}$$

SOLUZIONE

- *Dominio.* Il numeratore non è altro che $(x-3)^2$, mentre il denominatore si può scomporre come $(x-1)(x-2)^2$. Quindi pe trovare il dominio basta imporre che il denominatore non si annulli. Quindi il dominio è l'insieme dei reali tranne $x = 1$ e $x = 2$.
- *Segno.* Il numeratore è sempre positivo. Per quanto riguarda il denominatore, questo data la scomposizione $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-2)^2(x-1)$, è positivo per $x > 1$. Quindi la funzione sarà positiva per $x > 1$ e negativa altrimenti.
- *Zeri e intersezioni con gli assi.* L'unico zero della funzione, ovvero l'unico punto in cui si annulla il numeratore, è $x = 3$. Quando $x = 0$ invece, la funzione vale $f(0) = -9/4$. Quindi l'intersezione con l'asse y avviene nel punto $(0, -9/4)$.
- *Asintoti e limiti.* Calcoliamo i limiti interessanti. Per $x = 1$ otteniamo

$$\lim_{x \to 1^\pm} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} = \pm\infty \tag{9}$$

Per $x = 2$ analogamente

$$\lim_{x \to 2^\pm} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} = +\infty \tag{10}$$

Abbiamo quindi due **asintoti verticali** per $x = 1$ e $x = 2$. Per i limiti all'infinito abbiamo

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} &= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2(1 - 6/x + 9/x^2)}{x^3(1 - 5/x + 8/x^2 - 4/x^3)} = \\ &= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1 - 6/x + 9/x^2}{x(1 - 5/x + 8/x^2 - 4/x^3)} = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

Quindi $y = 0$ è un **asintoto orizzontale destro e sinistro**.

- *Massimi e minimi.* Calcoliamo la derivata di questa funzione

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x-6)(x^3 - 5x^2 + 8x - 4) - (x^2 - 6x + 9)(3x^2 - 10x + 8)}{(x^3 - 5x^2 + 8x - 4)^2} = \\ &= \frac{(x-3)(x-2)(-x^2 + 7x - 8)}{(x-1)^2(x-2)^4} = \frac{(x-3)(-x^2 + 7x - 8)}{(x-1)^2(x-2)^3} \end{aligned} \tag{12}$$

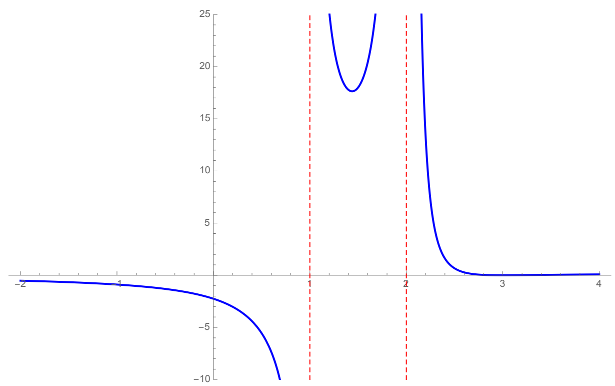
Il denominatore è positivo per $x > 2$ e negativo per $x < 2$. Invece per quanto riguarda il numeratore dobbiamo trovare le due radici del polinomio di secondo grado, che sono $\frac{7 \pm \sqrt{17}}{2}$. Dato che il coefficiente di x^2 è negativo, il polinomio di secondo grado sarà positivo per valori interni alle due radici. Quindi possiamo concludere che il numeratore sarà positivo per

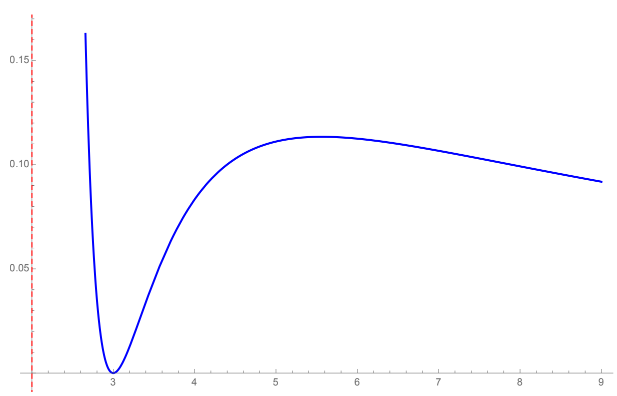
$$x < \frac{7-\sqrt{17}}{2} \quad \vee \quad 3 < x < \frac{3+\sqrt{17}}{2} \tag{13}$$

Dati i segni del denominatore e del numeratore della derivata, possiamo concludere che la nostra funzione sarà crescente per

$$\frac{7-\sqrt{17}}{2} < x < 2 \quad \vee \quad 3 < x < \frac{7+\sqrt{17}}{2} \tag{14}$$

e decrescente altrimenti. Quindi, $x = \frac{7-\sqrt{17}}{2}$ e $x = 3$ saranno dei **minimi** mentre $x = \frac{7+\sqrt{17}}{2}$ sarà un **massimo**.



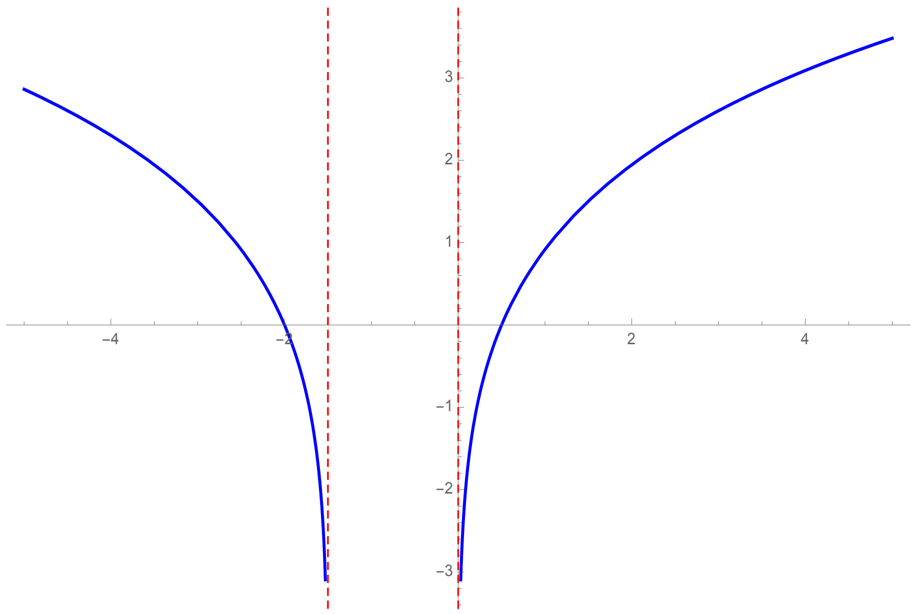


Zoom per $x > 2$.

- **Funzione 4.**

$$f(x) = \ln\left(x^2 + 3/2\, x\right) \tag{15}$$

SOLUZIONE



- **Funzione 5.**
$$f(x) = \frac{\ln|x-3|}{x} \tag{16}$$

  SOLUZIONE

  - *Dominio.* Abbiamo una funzione logaritmica, la quale è definita solo quando l'argomento è strettamente maggiore di zero. Quindi il logaritmo non sarà definito in $x = 3$. Il denominatore si annulla per $x = 0$. Quindi il dominio sarà
$$x \in (-\infty, 0) \cup (0, 3) \cup (3, +\infty) \tag{17}$$
  - *Segno.* La funzione logaritmica è negativa quando il suo argomento è compreso tra 0 e 1 e positiva quando il suo argomento è maggiore di 1. Di conseguenza abbiamo che il numeratore sarà positivo quando
$$|x-3| > 1 \tag{18}$$
    Questa equazione coinvolge un modulo. Per $x > 3$, abbiamo che $|x-3| = x-3$, quindi la nostra disequazione diventa $x > 4$. Per $x < 3$, invece, il modulo cambia il segno alla funzione $x - 3$, per questo motivo la disequazione diventa $3 - x > 1$ che si riduce a $x < 2$. Quindi il nostro numeratore sarà positivo per $x > 4$ e $x < 2$. Tenendo conto che il denominatore è invece positivo per $x > 0$, troviamo che la funzione è positiva per
$$0 < x < 2 \quad \vee \quad x > 4 \tag{19}$$
    e negativa altrimenti.
  - *Zeri e intersezioni con gli assi.* Il numeratore si annulla quando l'argomento del logaritmo è 1. Quindi gli zeri della funzione saranno $x = 2$ e $x = 4$. Dato che in 0 la funzione non è definita, non ci saranno intersezioni con l'asse y.
  - *Asintoti e limiti.* Calcoliamo i limiti interessanti. Per $x = 0$ otteniamo
$$\lim_{x \to 0^{\pm}} \frac{\ln|x-3|}{x} = \pm\infty \tag{20}$$
    Infatti il numeratore è sempre positivo, e quindi il segno dell'infinito è dettato dal segno del denominatore.
    Per x=3
$$\lim_{x \to 3^{\pm}} \frac{\ln|x-3|}{x} = -\infty \tag{21}$$
    Infatti in questo caso il denominatore è positivo in $x = 3$, mentre il logaritmo quando si annulla va a $-\infty$.
    $x = 0$ e $x = 3$ sono quindi due **asintoti verticali**.
    Per quanto riguarda i limiti all'infinito abbiamo
$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\ln|x-3|}{x} = 0 \tag{22}$$
    Perchè il denominatore va all'infinito più velocemente del numeratore. $y = 0$ è quindi un **asintoto orizzontale** destro e sinistro.

- *Massimi e minimi.* Facciamo la derivata della nostra funzione. Per $x > 3$ la nostra funzione si scrive $f(x) = \ln(x-3)/x$. Quindi la derivata sarà

$$f'(x) = \frac{x/(x-3) - \ln(x-3)}{x^2} \tag{23}$$

Per $x < 3$, la funzione la possiamo scrivere $f(x) = \ln(3-x)/x$. La derivata sarà

$$f'(x) = \frac{x/(x-3) - \ln(3-x)}{x^2} \tag{24}$$

. Per studiare il segno della derivata abbiamo bisogno di risolvere le due disequazioni

$$\frac{x}{x-3} - \ln(x-3) > 0 \tag{25}$$

per $x > 3$ e

$$\frac{x}{x-3} - \ln(3-x) > 0 \tag{26}$$

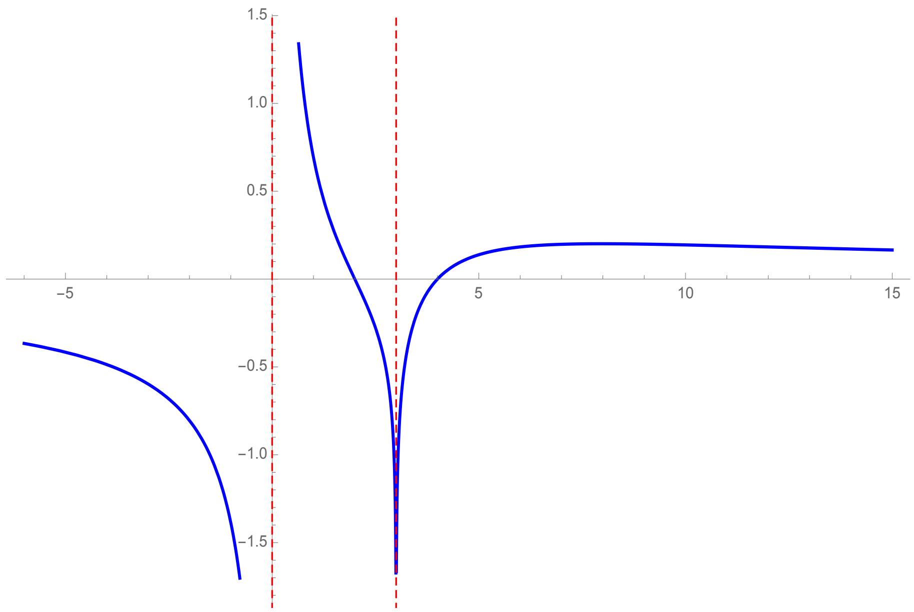
per $x < 3$. Partiamo dalla prima. Consideriamo gli andamenti delle funzioni. $x/(x-3)$ per $x \to 3^+$ va a $+infty$, mentre per $x \to +\infty$ tende a 1 in modo monotono discentente. La funzione $\ln(x-3)$ d'altro canto parte da $-\infty$ quando $x \to 3^+$ e tende a $+\infty$ in maniera monotona crescente quando $x \to +\infty$. Sicuramente quindi $x/(x-3) > \ln(x-3)$ fino ad un certo punto x_1 (che si può valutare numericamente ma non analiticamente). Da x_1 in poi invece, avremo che $x/(x-3) < \ln(x-3)$. Quindi la nostra derivata sarà positiva per $3 < x < x_1$ e negativa altrimenti. La funzione in questo intervallo sarà dunque crescente, e il punto $x = x_1$ sarà un **punto di massimo**.
La seconda disequazione è più difficile da valutare. Infatti entrambe le funzioni per $x < 3$ sono monotone decrescenti. Il logaritmo parte da $+\infty$ e va a $-\infty$ per $x \to 3^-$, mentre il polinomio fratto parte da $y = 1$ e va a $-\infty$ per $x \to 3^-$. Questo ci dice che le funzioni potrebbero incontrarsi o meno nel loro percorso. Tuttavia facciamo alcune valutazioni. In $x = 0$, la funzione fratta vale 0, mentre la funzione logaritmica vale $\ln(3)$, che è maggiore di 1. Questo ci dice che se le due funzioni si incontrano, questo deve avvenire per un valore della x compreso da 0 e 3. Tuttavia calcolando le derivate delle due funzioni, che sono rispettivamente

$$\left(\frac{x}{x-3}\right)' = \frac{x-3-x}{(x-3)^2} = \frac{-3}{(x-3)^2} \tag{27}$$

e

$$(\ln(3-x))' = \frac{1}{x-3} \tag{28}$$

si può notare come la funzione fratta è sempre più ripida della funzione logaritmica per $0 < x < 3$ (derivata maggiore in modulo). Quindi dato che in $x = 0$ la funzione logaritmica è maggiore di quella fratta, non c'è modo che le due si possano incontrare. Quindi, essendo $\ln(3-x) > x/(x-3)$ per ogni valore di x minore di 3, la nostra funzione sarà sempre decrescente per $x < 3$.



- **Funzione 6.**

$$f(x) = \frac{e^{-1/x}}{x(x+1)} \tag{29}$$

SOLUZIONE

- *Dominio.* Il denominatore si annulla in $x = -1$ e $x = 0$. Tuttavia in $x = 0$ abbiamo che anche l'esponente dell'esponenziale esplode, quindi conviene controllare cosa succede in questo punto. Calcoliamo i limiti

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x(x+1)} = 0 \tag{30}$$

Infatti per valori della x maggiori di zero, abbiamo che l'esponenziale sarà della forma "$e^{-\infty}$" che tende a zero. Siccome l'andamento dell'esponenziale prevale su quello del polinomio al denominatore, il limite destro sarà 0.

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{e^{-1/x}}{x(x+1)} = -\infty \tag{31}$$

Infatti in questo caso l'esponenziale tenderà a $+\infty$. Dato che il denominatore è negativo quando $x \to 0^-$, la funzione tenderà a $-\infty$.
Dato che i limiti destro e sinistro in 0 sono diversi, possiamo concludere che la funzione non è definita in 0 e quindi il dominio è tutto l'insieme dei reali tranne $x = -1$ e $x = 0$.

- *Segno.* Dato che la funzione esponenziale è sempre positiva, il segno sarà determinato dal segno del denominatore. Quest'ultimo è maggiore di zero quando $x < -1$ e $x > 0$.

- *Zeri e intersezioni con gli assi.* Il numeratore non si annulla mai tranne in 0 solo da destra (come abbiamo visto in precedente). Dato che in x=0 la funzione non esiste, non ci saranno intersezioni con l'asse y.

- *Asintoti e limiti.* I limiti per $x \to 0$ li abbiamo già calcolati. Controlliamo cosa succede per $x = -1$

$$\lim_{x \to -1^{\pm}} \frac{e^{-1/x}}{x(x+1)} = \mp\infty \tag{32}$$

Infatti il numeratore è sempre positivo, e quindi il segno dell'inifinito è definito dal segno del denominatore per $x > -1$ e $x < -1$. $x = -1$ è quindi un **asintoto verticale**.
All'infinito abbiamo

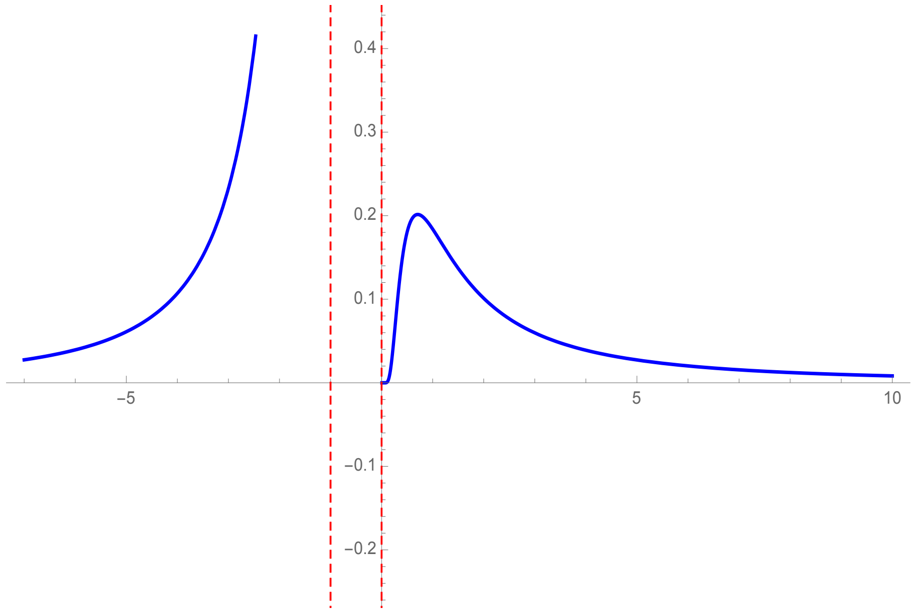
$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{e^{-1/x}}{x(x+1)} = 0 \tag{33}$$

Infatti in questo caso la funzione esponenziale tende a "e^0" che fa 1, mentre il denominatore esplode, facendo tendere la funzione a 0. Quindi $y = 0$ è un **asintoto orizzontale** destro e sinistro.

- *Massimi e minimi.* Facciamo la derivata della nostra funzione.

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-1/x}\frac{\frac{1}{x^2}x(x+1) - (2x+1)}{x^2(x+1)^2} = e^{-1/x}\frac{(x+1) - (2x^2+x)}{x^3(x+1)^2} = \\ &= e^{-1/x}\frac{1-2x^2}{x^3(x+1)^2} \end{aligned} \tag{34}$$

Il numeratore si annulla per $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$. Questi saranno due punti stazionari. Inoltre il numeratore sarà positivo per valori interni alle radici (poichè il cofficiente del termine quadratico è negativo). Il denominatore, invece, a causa della presenza di un termine cubico, sarà positivo per $x > 0$ e negativo altrimenti. Quindi la derivata in totale sarà positiva per $x < -\sqrt{\frac{1}{2}}$ e per $0 < x < \sqrt{\frac{1}{2}}$. In questi intervalli la funzione sarà crescente, decrescente negli altri. I punti $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$ saranno due **massimi**.
N.B. Nella figura successiva sembra che la funzione non esista tra -1 e 0. Tuttavia il motivo per il quale la curva non è visibile è che, se prendiamo un valore tra questi due, per esempio $x = -1/2$, vediamo che $f(-1/2) = e^2/(-1/2)(1/2) = -4e^2 \sim -30$, quindi la funzione c'è ma è più in basso rispetto al grafico visualizzato. Tra i valori -1 e 0 la funzione è all'incirca simile ad una parabola con concavità verso il basso, (in -1 da destra e in 0 da sinistra la funzione va a $-\infty$) con un massimo in $x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$.



- **Funzione 7.**

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2-6x+5}{|x-1|}\right) \tag{35}$$

SOLUZIONE

- *Dominio.* La funzione logaritmica è definita solo quando il suo argomento è maggiore strettamente di zero. Possiamo notare cumeratore dell'argomento può essere scomposto in $(x-1)(x-5)$. Siccome al denominatore abbiamo la presenza di $!x-1!$ che vale $(x-1)$ per $x>1$ e $-(x-1)$ per $x<1$, possiamo scrivere la nostra funzione come

$$\ln[sgn(x-1)(x-5)] \tag{36}$$

dove la funzione $sgn(x-1)$ ovvero la funzione segno di $x-1$, vale $+1$ quando $x-1>0$ e -1 quando $x-1<0$.
Adesso è evidente che l'argomento del logaritmo sarà positivo non solo per $x>5$ quando la funzione segno e $(x-5)$ sono entrambe positive, ma anche per $x<1$, dove le due funzioni sono entrambe negative. Possiamo notare tuttavia come mentre vale che

$$\lim_{x\to 5^+} \ln[sgn(x-1)(x-5)] = -\infty \tag{37}$$

poichè l'argomnto del logaritmo si annulla, in $x=1$ abbiamo che

$$\lim_{x\to 1^-} \ln[sgn(x-1)(x-5)] = \ln(4) \tag{38}$$

Di conseguenza, possiamo immaginare come, essendo il limite sinistro in $x=1$ definito, anche se non esiste quello destro, la funzione esista in $x=1$ e valga $f(1)=\ln(4)$. Quindii il dominio della funzione sarà

$$x \in (-\infty, 1] \cup (5, +\infty) \tag{39}$$

– *Segno.* Per capire quando la funzione è positiva, dobbiamo porre l'argomento del logaritmo maggiore di 1. Per $x > 1$ la disequazione da risolvere è allora

$$x - 5 > 1 \tag{40}$$

Che chiaramente è risolta per $x > 6$. Quindi tenendo conto dell dominio della funzione, questa sarà negativa per $5 < x < 6$ e positiva per $x > 6$. Per $x < 1$, invece, la disequazione è

$$5 - x > 1 \tag{41}$$

che è risolta per $x < 4$. Dato che questa disequazione vale per $x < 1$, è sempre vera. Quindi per $x < 1$ la funzione sarà sempre positiva.

- *Zeri e intersezioni con gli assi.* Abbiamo visto che la funzione cambia di segno in $x = 6$ quindi questo sarà uno zero. Ponendo $x = 0$, invece, troviamo che l'intersezione con l'asse y avviene nel punto $(0, \ln(5))$.

- *Asintoti e limiti.* Abbiamo già calcolato i limiti in $x = 1$ e $x = 5$ concludendo che il secondo è un **asintoto verticale**. Vediamo cosa succede all'infinito

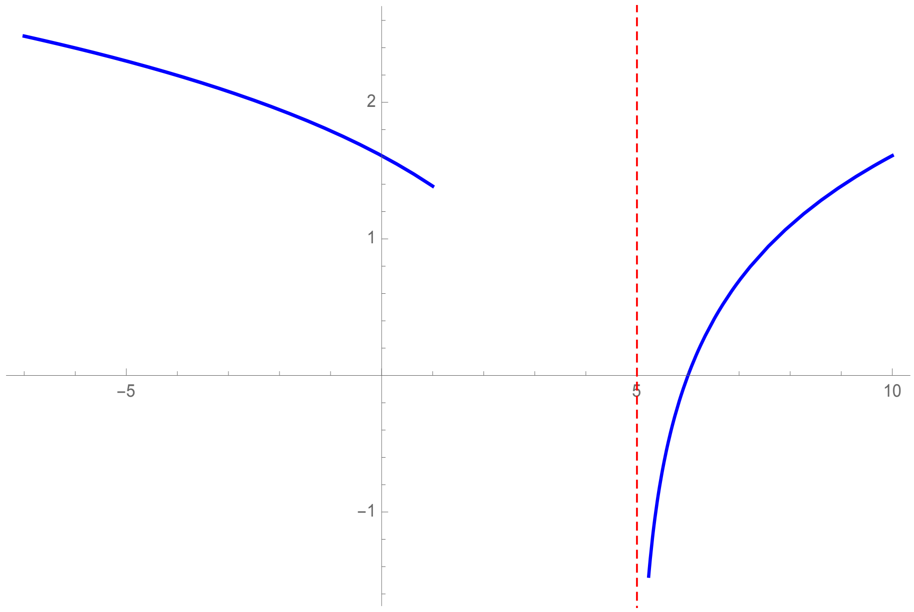
$$\lim_{x \to \pm\infty} \ln[sgn(x-1)(x-5)] = +\infty \tag{42}$$

infatti l'argomento in entrambi i casi va a $+\infty$ e il logaritmo quando il suo argomento esplode va a $+\infty$. Quindi non abbiamo alcun asintoto orizzontale. Dato che in questo caso $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)/x = 0$, la funzione non avrà nemmeno asintoti obliqui.

- *Massimi e minimi.* Facciamo la derivata della nostra funzione. Sia nella regione destra che in quella sinistra avremo

$$f'(x) = \frac{1}{x-5} \tag{43}$$

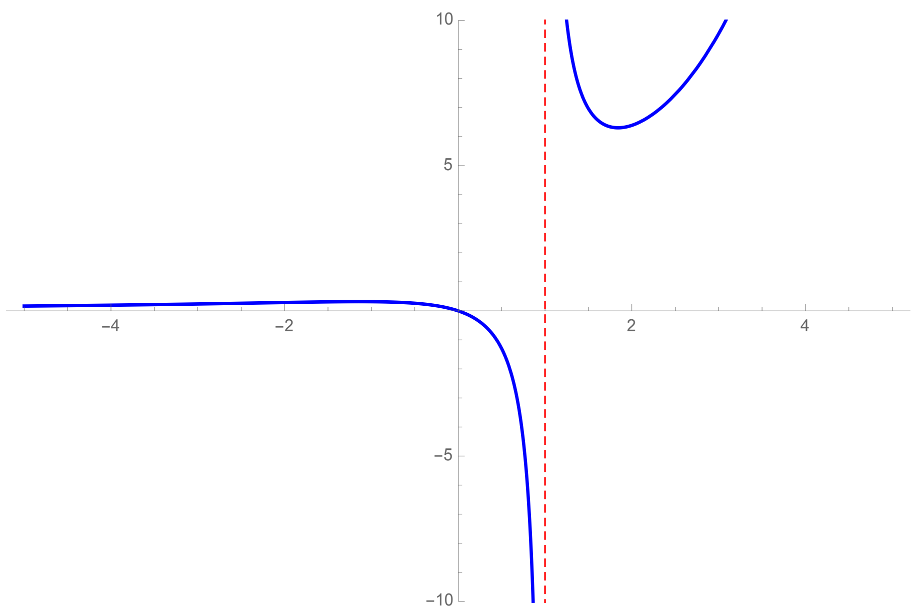
Questa derivata non si annulla mai, quindi non avremo punti stazionari. Inoltre sarà negativa per $x < 5$, quindi nel ramo sinistro la funzione sarà discendente, mentre positiva per $x > 5$, dove la nostra funzione sarà crescente.



- **Funzione 8.**

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x - 1} \tag{44}$$

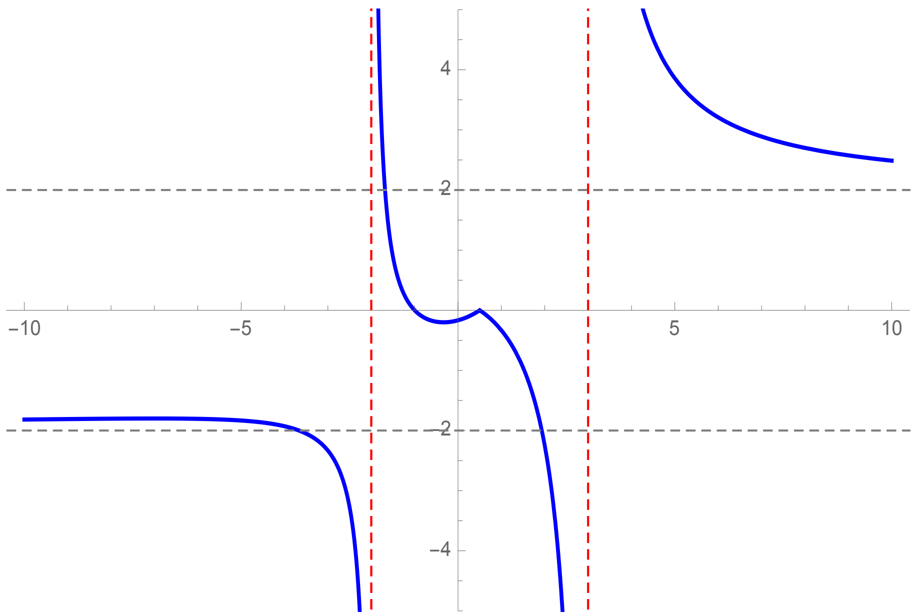
SOLUZIONE



- **Funzione 9.**

$$f(x) = \frac{|2x-1|(x+1)}{x^2-x-6} \tag{45}$$

SOLUZIONE

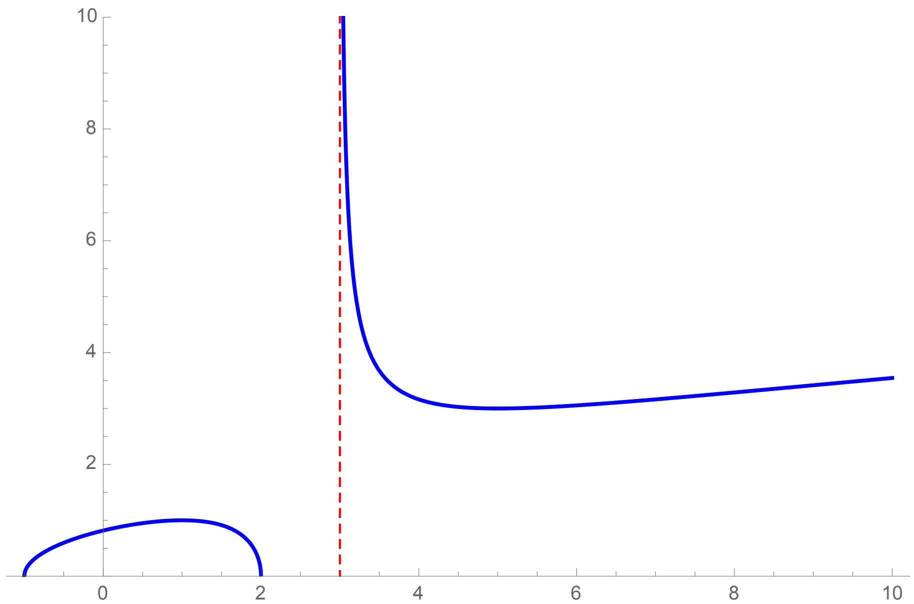


- **Funzione 10.**
$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - x - 2}{x - 3}} \tag{46}$$

SOLUZIONE

- *Dominio.* Per trovare il dominio dobbiamo imporre che il radicando sia maggiore di 0. Il numeratore si può scrivere come $(x+1)(x-2)$. Quindi avremo che questo è positivo per $x < -1$ e $x > 2$. Invece il denominatore è positivo per $x > 3$. Allora il radicando è positivo per $x > 3$ e per $-1 < x < 2$. Tuttavia mentre in $x = 3$ la funzione non esiste perchè il denominatore si annulla, in $x = -1$ e $x = 2$ è solo il numeratore ad annullarsi e quindi la funzione esiste. Il dominio sarà dunque
$$x \in [-1, 2] \cup (3, +\infty) \tag{47}$$
– *Segno.* Essendo la funzione una radice quadrata è sempre positiva.
- *Zeri e intersezioni con gli assi.* Gli zeri li avremo quando il numeratore si annulla, ovvero in $x = -1$ e in $x = 2$. L'intersezione con l'asse y l'abbiamo per $x = 0$, punto in cui la funzione vale $f(0) = \sqrt{2/3}$.
- *Asintoti e limiti.* Calcoliamo i limiti nei punti in cui non conosciamo il comportamento della funzione.
$$\lim_{x \to 3^+} \sqrt{\frac{x^2 - x - 2}{x - 3}} = +\infty \tag{48}$$
Dato che la funzione è sempre positiva. Quindi $x = 3$ è un **asintoto verticale**.
Per quanto riguarda il comportamento all'infinito abbiamo
$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x^2 - x - 2}{x - 3}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{|x|}{\sqrt{x}} \sqrt{\frac{1 - 1/x - 2/x^2}{1 - 3/x}} = +\infty \tag{49}$$
Quindi non abbiamo asintoto orizzontale. Controlliamo eventuale asintoto obliquo
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x^2 - x - 2}{x - 3}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{|x|}{x^{3/2}} \sqrt{\frac{1 - 1/x - 2/x^2}{1 - 3/x}} = 0 \tag{50}$$
Quindi non abbiamo neanche un asintoto obliquo.
- *Massimi e minimi.* Calcoliamo la derivata.
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x - 3}{x^2 - x - 2}} \frac{(2x - 1)(x - 3) - (x^2 - x - 2)}{(x - 3)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{x^2 - 6x + 5}{\sqrt{x^2 - x - 2}(x - 3)^{3/2}} \end{aligned} \tag{51}$$
Abbiamo due punti stazionari, che sono gli zeri della funzione, ovvero $x = 5$ e $x = 1$. Per quanto riguarda il segno, sarà dettato dal segno del numeratore dato che il denominatore

è sempre positivo. Il numeratore sarà positivo e quindi la funzione crescente per $x < 1$ e $x > 5$ e decrescente altrimenti. Di conseguenza $x = 1$ sarà un **massimo** mentre $x = 5$ sarà un **minimo**.
Notiamo come in $x = -1$ e in $x = 2$ la derivata diverge, rispettivamente andando a $+\infty$ e a $-\infty$. Questo ci dice che la funzione in questi due punti sarà a tangente verticale.



- **Funzione 11.**

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2-4x-3}}{\sqrt{x+1}} \tag{52}$$

SOLUZIONE

- *Dominio.* Per trovare il dominio dobbiamo imporre che la radice quadrata abbia come radicando un numero strettamente positivo (trovandosi al denominatore). Quindi il dominio sarà $x > -1$.
- *Segno.* Il denominatore è sempre positivo. Il numeratore e quindi la funzione intera sarà invece positivo quando il radicando è positivo. Ovvero quando $x < 2 - \sqrt{7}$ e $x > 2 + \sqrt{7}$.
- *Zeri e intersezioni con gli assi.* Gli zeri li avremo quando il numeratore si annulla, ovvero in $x = 2 - \sqrt{7}$ e in $x = 2 + \sqrt{7}$. L'intersezione con l'asse y, per $x = 0$, avviene nel punto $(0, -\sqrt[3]{3})$.
- *Asintoti e limiti.* Calcoliamo i limiti interessanti.

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{\sqrt[3]{x^2-4x-3}}{\sqrt{x+1}} = +\infty \tag{53}$$

Dato che la funzione è positiva intorno a $x = -1$. Quindi $x = -1$ è un **asintoto verticale**.
Per quanto riguarda il comportamento all'infinito abbiamo

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2-4x-3}}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^{2/3}}{x^{1/2}} \frac{\sqrt[3]{1-4/x-3/x^2}}{\sqrt{1+1/x}} = +\infty \tag{54}$$

Quindi non abbiamo asintoto orizzontale. Controlliamo eventuale asintoto obliquo

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} \frac{\sqrt[3]{x^2-4x-3}}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^{2/3}}{x^{3/2}} \frac{\sqrt[3]{1-4/x-3/x^2}}{\sqrt{1+1/x}} = 0 \tag{55}$$

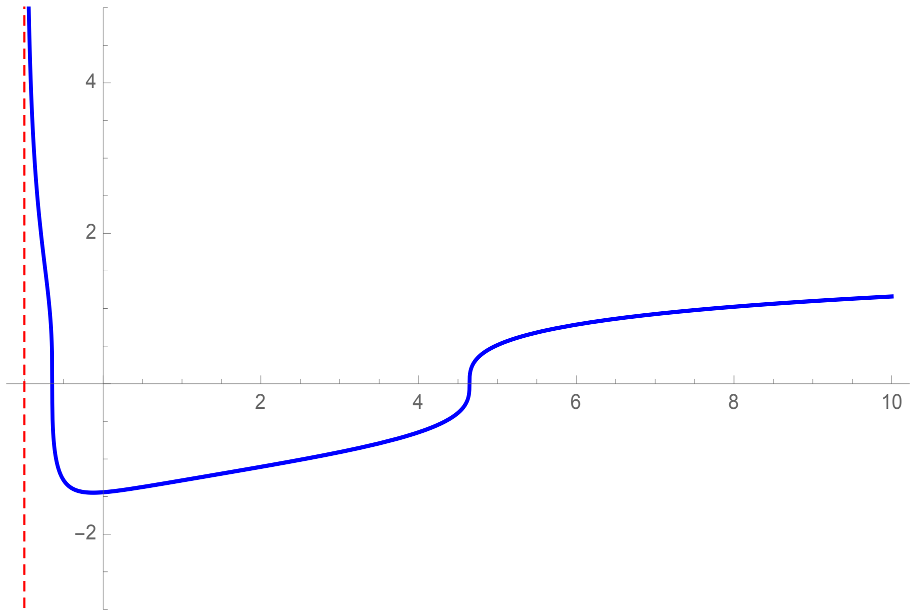
Quindi non abbiamo neanche un asintoto obliquo.

- *Massimi e minimi.* Calcoliamo la derivata.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{3}\frac{2x-4}{\sqrt{(x^2-4x-3)^2}}\sqrt{x+1} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt[3]{x^2-4x-3}}{\sqrt{x+1}}}{x+1} = \\ &= \frac{1}{6}\frac{x^2+8x+1}{\sqrt{(x^2-4x-4)^2}(1+x)^{3/2}} \end{aligned} \tag{56}$$

I punti in cui la derivata si annulla sono $x = -4 \pm \sqrt{15}$. La prima radice, quella con il segno meno, è minore di -1, quindi siamo fuori dal dominio. La seconda, invece, è pari a circa -0.12, quindi è compresa nel dominio e corrisponderà ad un punto stazionario. Studiamo il segno della derivata. Il numeratore sarà positivo per $x > -4 + \sqrt{15}$,

negativo altrimenti nel dominio della funzione. Il denominatore invece, per $x > -1$ sarà sempre positivo. Quindi la funzione sarà decrescente per $-1 < x < -4 + \sqrt{15}$ e crescente altrimenti. Il punto $x = -4 + \sqrt{15}$ sarà un punto di minimo.
Notiamo come negli zeri della funzione la derivata non è definita e quindi la funzione avrà tangente verticale.



- **Funzione 12.**

$$f(x) = (x-1)^3 e^{-x} \tag{57}$$

SOLUZIONE

- *Dominio.* Il dominio in questo caso non ha alcuna limitazione.
- *Segno.* La funzione esponenziale è sempre positiva. Quindi il segno sarà dettato dal segno del polinomio. La funzione sarà positiva per $x > 1$.
- *Zeri e intersezioni con gli assi.* La funzione si annulla solo per $x = 1$. Quando $x = 0$ la funzione attraversa l'asse y nel punto (0,-1).
- *Asintoti e limiti.* Calcoliamo i limiti all'infinito.

$$\lim_{x\to+\infty} (x-1)^3 e^{-x} = 0 \tag{58}$$

Dato che l'andamento dell'esponenziale predomina su quello del polinomio. Quindi $y = 0$ è **asintoto orizzontale** destro.
Dall'altro lato invece

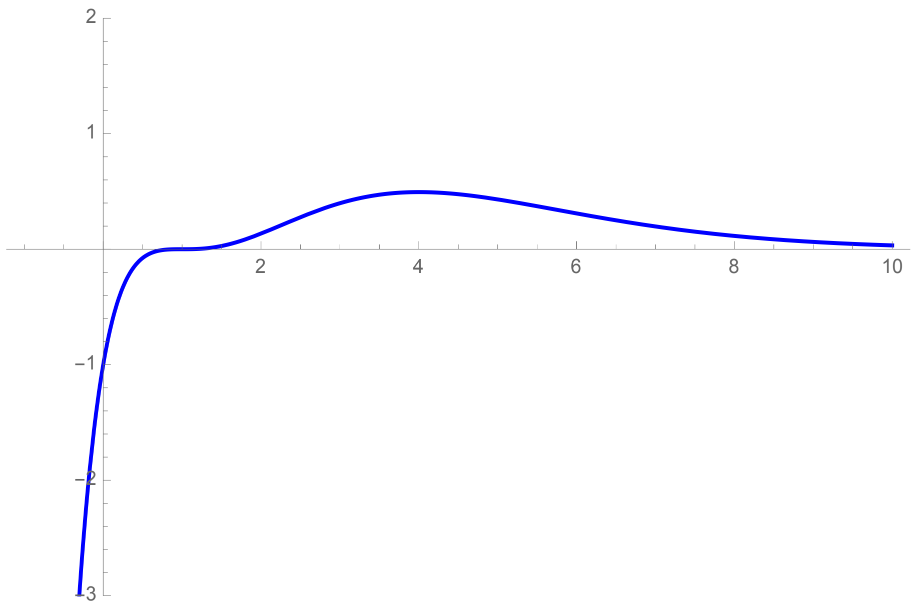
$$\lim_{x\to-\infty} (x-1)^3 e^{-x} = +\infty \tag{59}$$

Per lo stesso motivo. Non abbiamo asintoto obliquo perchè l'esponenziale va all'infinito più veloce di qualsiasi polinomio.

- *Massimi e minimi.* Calcoliamo la derivata.

$$f'(x) = (3(x-1)^2 - (x-1)^3)e^{-x} = (x-1)^2(4-x)e^{-x} \tag{60}$$

La derivata si annulla per $x = 1$ e $x = 4$. Inoltre sarà positiva per $x < 4$ e negativa altrimenti. Quindi questo ci suggerisce che la funzione sarà crescente fino a $x = 4$ e decrescente da $x = 4$ all'infinito. Quindi i due zeri della derivata saranno rispettivamente un **punto di flesso orizzontale** e un **massimo**.



- **Funzione 13.**

$$xe^{\frac{x^2+1}{x^2-1}} \tag{61}$$

SOLUZIONE

- *Dominio.* Il dominio in questo caso è composto da tutti i punti in cui il denominatore dell'esponente non è nullo, ovvero per tutti i reali tranne $x = 1$ e $x = -1$. Calcoliamo però i limiti in questi due punti

$$\lim_{x \to -1^-} xe^{\frac{x^2+1}{x^2-1}} = -\infty \tag{62}$$

poichè l'esponente è positivo per valori minori di -1 e quindi l'esponenziale tende a $+\infty$ e il segno negativo della x trasforma il limite in $-\infty$.

$$\lim_{x \to -1^+} xe^{\frac{x^2+1}{x^2-1}} = 0 \tag{63}$$

Infatti per valori della x compresi tra -1 e 1 l'esponente è negativo, ed esplode, quindi l'esponenziale tende a 0. In $x = -1$ avremo la funzione andrà a $-\infty$ da sinistra e tenderà a 0 da destra.
In x=1

$$\lim_{x \to 1^-} xe^{\frac{x^2+1}{x^2-1}} = 0 \tag{64}$$

Poichè di nuovo l'esponenziale ha esponente negativo e quindi tende a 0. Dall'altro lato

$$\lim_{x \to 1^+} xe^{\frac{x^2+1}{x^2-1}} = +\infty \tag{65}$$

dato che l'esponente esplode verso $+\infty$ e il segno della x è positivo. Quindi in $x = 1$ la funzione andrà a 0 da sinistra e divergerà positivamente da destra.

- *Segno.* La funzione esponenziale è sempre positiva. Quindi il segno sarà dato dalla x. La funzione sarà quindi positiva per $x > 0$.
- *Zeri e intersezioni con gli assi.* La funzione oltre a valere 0 in $x = -1$ da destra e in $x = 1$ da sinistra, avrà uno zero in x=0, dove tra l'altro incontra anche l'asse y nell'origine.
- *Asintoti e limiti.* Calcoliamo i limiti all'infinito.

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{\frac{x^2+1}{x^2-1}} = +\infty \tag{66}$$

Infatti la parte esponenziale tende a e, dato che l'esponente tende a 1, mentre la x esplode. Controlliamo eventuali asintoti obliqui:

$$\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{x^2+1}{x^2-1}} = e \tag{67}$$

Quindi il numero e potrebbe essere il coefficiente angolare di un eventuale asintoto obliquo. Calcoliamo

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} xe^{\frac{x^2+1}{x^2-1}} - ex = xe(e^{\frac{x^2+1}{x^2-1}-1} - 1) = \\ = \lim_{x\to+\infty} xe(e^{\frac{2}{x^2-1}} - 1) \end{aligned} \tag{68}$$

Per valutare questo limite possiamo applicare De l'Hopital scrivendo x come $1/(1/x)$

$$\lim_{x\to+\infty} e\frac{e^{\frac{2}{x^2-1}} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e\frac{\frac{4x}{(x^2-1)^2}}{\frac{-1}{x^2}}e^{\frac{2}{x^2-1}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{x^2+1}{x^2-1}}\frac{-4x^3}{(x^2-1)^2} = 0 \tag{69}$$

Quindi la retta $y = ex$ sarà un **asintoto obliquo destro**. Allo stesso modo si può arrivare a dire che questa retta è asintoto obliquo anche a sinistra. Infatti

$$\lim_{x\to-\infty} xe^{\frac{x^2+1}{x^2-1}} = -\infty \tag{70}$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{x^2+1}{x^2-1}} = e \tag{71}$$

$$\lim_{x\to-\infty} xe^{\frac{x^2+1}{x^2-1}} - ex = 0 \tag{72}$$

- *Massimi e minimi.* Calcoliamo la derivata.

$$f'(x) = e^{\frac{x^2+1}{x^2-1}} + \frac{2x(x^2-1) - 2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}e^{\frac{x^2+1}{x^2-1}} = \frac{x^4 - 6x^2 + 1}{(x^2-1)^2}e^{\frac{x^2+1}{x^2-1}} \tag{73}$$

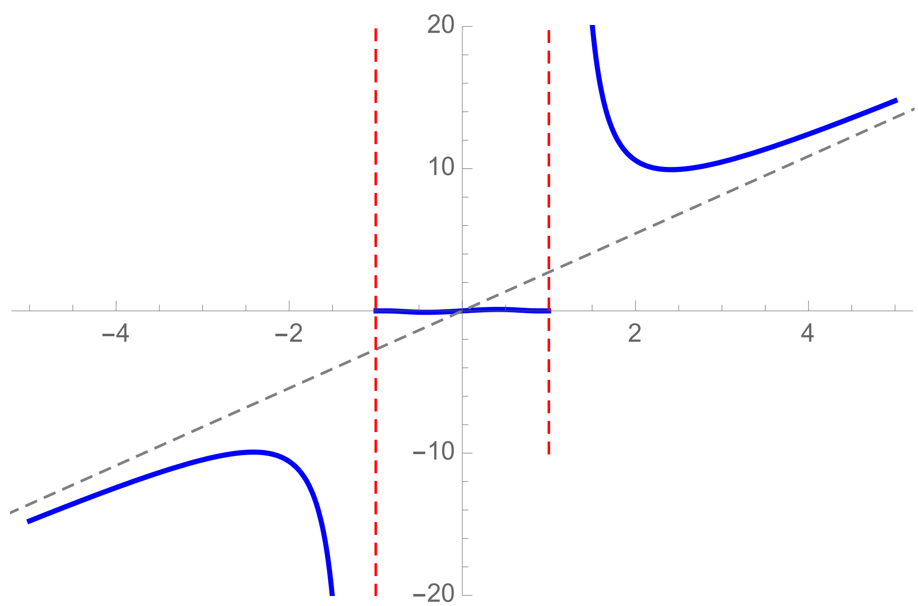
L'equazione quartica contiene solo termine noto e termine in x^2. Possiamo allora porre $z = x^2$ e risolvere l'equazione $z^2 - 6z + 1$, che ha come radici $z_{1/2} = 3 \pm \sqrt{8}$. Dato che entrambe le soluzioni sono positive, l'equazione quartica avrà quattro radici reali, che sono $x_{1/2/3/3} = \pm\sqrt{3 \pm \sqrt{8}}$. Questi saranno 4 punti stazionari per la nostra funzione. Studiamo ora il segno della derivata. Questa sarà positiva per

$$x < -\sqrt{3+\sqrt{8}} \quad \vee \quad -\sqrt{3-\sqrt{8}} < x < \sqrt{3-\sqrt{8}} \quad \vee \quad x > \sqrt{3+\sqrt{8}} \tag{74}$$

In questi intervalli la funzione è crescente. Decrescente altrimenti. Di conseguenza abbiamo che

- $-\sqrt{3+\sqrt{8}}$ è un massimo
- $-\sqrt{3-\sqrt{8}}$ è un minimo
- $\sqrt{3-\sqrt{8}}$ è un massimo
- $\sqrt{3+\sqrt{8}}$ è un minimo

N.B. Nel grafico seguente non si apprezza il comportamento ondulatorio tra -1 e 1, poichè in quell'intervallo la funzione assume valori molto piccoli.



- **Funzione 14.**

$$f(x) = \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{2|2x^3 - 3x^2 - 9x + 10|} \tag{75}$$

SOLUZIONE

- *Dominio.* Il numeratore si può scrivere come $(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$ mentre il denominatore come $2(x-5/2)(x+2)(x-1)$. Quindi la funzione esiste ovunque tranne nei punti in cui si annulla il denominatore, ovvero $x = 5/2$, $x = -2$ e $x = 1$. Tuttavia negli ultimi due si annulla anche il numeratore. Quindi controlliamo i limiti in questi punti. Ricordiamo che il numeratore è positivo per $x < -2$, $-1 < x < 1$ e $x > 2$. Il denominatore sarà positivo invece per $-2 < x < 1$ e per $x > 5/2$. Nelle altre regione, in cui è negativo, il modulo cambia il suo segno.
  Quindi
  $$\lim_{x\to -2^-} -\frac{x^4 - 5x^2 + 4}{2(2x^3 - 3x^2 - 9x + 10)} = 2/9 \tag{76}$$
  $$\lim_{x\to -2^+} \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{2(2x^3 - 3x^2 - 9x + 10)} = -2/9 \tag{77}$$
  $$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{2(2x^3 - 3x^2 - 9x + 10)} = 1/3 \tag{78}$$
  $$\lim_{x\to 1^+} -\frac{x^4 - 5x^2 + 4}{2(2x^3 - 3x^2 - 9x + 10)} = -1/3 \tag{79}$$
  Quindi in $x = -2$ e in $x = 1$ la funzione non sarà definita e avrà un salto.
- *Segno.* Il denominatore grazie al modulo è sempre positivo, quindi la funzione sarà positiva quando lo è in numeratore, quindi nelle regioni sopra citate $x < -2$, $-1 < x < 1$ e $x > 2$.
- *Zeri e intersezioni con gli assi.* In $x = -2$ e in $x = 1$ la funzione ha un salto, quindi può annullarsi solo negli altri due zeri del numeratore, ovvero $x = -1$ e $x = 2$. Incontra l'asse y nel punto $(0, 1/5)$
- *Asintoti e limiti.* Calcoliamo i limiti per $x \to 5/2$. Qui il denominatore non sarà cambiato di segno dal modulo e il numeratore sarà sempre positivo, quindi avremo
  $$\lim_{x\to 5/2^\pm} \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{2(2x^3 - 3x^2 - 9x + 10)} = +\infty \tag{80}$$
  $x = 5/2$ è quindi un **asintoto verticale**.
  Guardiamo il comportamento all'infinito.
  $$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{2(2x^3 - 3x^2 - 9x + 10)} = +\infty \tag{81}$$

Tuttavia dato che il numeratore presenta una potenza di x superiore di 1 rispetto al denominatore, ci possiamo aspettare un asintoto obliquo. Infatti

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{2x(2x^3 - 3x^2 - 9x + 10)} = 1/4 \tag{82}$$

Controlliamo ora il termine noto dell'asintoto obliquo

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{2(2x^3 - 3x^2 - 9x + 10)} - \frac{x}{4} = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4 - 5x^2 + 4 - x^4 + 3/2\, x^3 + 9/2\, x^2 - 5x}{2(2x^3 - 3x^2 - 9x + 10)} = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{3/2\, x^3 - 1/2\, x^2 - x^4 - 5x + 4}{2(2x^3 - 3x^2 - 9x + 10)} = \frac{3}{8}
\end{aligned} \tag{83}$$

Quindi $y = x/4 + 3/8$ è un **asintoto obliquo destro**.
A sinistra, dato che il modulo esplicita un segno meno e il numeratore è positivo, con lo stesso ragionamento si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} -\frac{x^4 - 5x^2 + 4}{2(2x^3 - 3x^2 - 9x + 10)} = +\infty \tag{84}$$

$$\lim_{x\to+\infty} -\frac{x^4 - 5x^2 + 4}{2x(2x^3 - 3x^2 - 9x + 10)} = -1/4 \tag{85}$$

$$\lim_{x\to+\infty} -\frac{x^4 - 5x^2 + 4}{2(2x^3 - 3x^2 - 9x + 10)} + \frac{x}{4} = -\frac{3}{8} \tag{86}$$

Quindi $y = -x/4 - 3/8$ è un **asintoto obliquo sinistro**.

- *Massimi e minimi.* Calcoliamo la derivata. Nelle regioni in cui il denominatore è positivo (vedi sopra), avremo

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}{4(x-5/2)(x+1)(x+2)} = \frac{(x+1)(x-2)}{4(x-5/2)} \tag{87}$$

Quindi la derivata possiamo scriverla

$$f'(x) = \frac{((x-2) + (x+1))(x-5/2) - (x+1)(x-2)}{4(x-5/2)^2} = \frac{x^2 - 5x + 9/2}{(x-5/2)^2} \tag{88}$$

Questa derivata si annulla in $x = (5 \pm \sqrt{7})/2$. I valori numerici di questi due punti sono $x \sim 1.17$ e $x \sin 3.8$. Il primo punto non è nel dominio in cui il denominatore è positivo, quindi non dobbiamo prenderlo in considerazione. Il secondo punto invece si trova nel dominio che stiamo considerando e sarà un punto stazionario. Studiando il segno possiamo vedere come $x = (5 + \sqrt{7})/2$ è un minimo.
Nell'altra regione otteniamo la stessa derivata con un segno meno davanti. Questa volta l'unico zero della derivata da considerare è $(5 - \sqrt{7})/2$. Studiando il segno, anche questo sarà un minimo.
Ricapitolando

- Funzione decrescente fino a $x = -2$
- Funzione crescente per $-2 < x < 1$
- Funzione decrescente per $1 < x < (5 - \sqrt{7})/2$
- Funzione crescente per $(5 - \sqrt{7})/2 < x < 5/2$
- Funzione decrescente da $5/2 < x < (5 + \sqrt{7})/2$
- Funzione crescente per $x > (5 + \sqrt{7})/2$