Esercitazione 4

A. Giarnetti

- **Esercizio 1.** Sviluppare i polinomi di Taylor di queste funzioni fino al terzo ordine
  - f(x)=$\sqrt{2x^2+1}$ intorno a $x_0 = 0$
    SOLUZIONE
    Calcoliamo le derivate della funzione

$$f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}} \tag{1}$$

$$f''(x) = \frac{2}{(2x^2+1)^{3/2}} \tag{2}$$

$$f'''(x) = \frac{-12x}{(2x^2+1)^{5/2}} \tag{3}$$

Il polinomio di Taylor fino al terzo ordine attorno ad $x_0 = 0$ lo possiamo scrivere come

$$P_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 \tag{4}$$

che sostituendo diventa

$$P_3(x) = 1 + x^2 \tag{5}$$

– f(x)=$\log x^2$ intorno a $x_0 = 1$
SOLUZIONE
Calcoliamo le derivate della funzione

$$f'(x) = \frac{2}{x} \tag{6}$$

$$f''(x) = -\frac{2}{x^2} \tag{7}$$

$$f'''(x) = \frac{4}{x^3} \tag{8}$$

Il polinomio di Taylor fino al terzo ordine attorno ad $x_0 = 1$ lo possiamo scrivere come

$$P_3(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{6}(x-1)^3 \tag{9}$$

che sostituendo diventa

$$P_3(x) = 2(x-1) - (x-1)^2 + \frac{2}{3}(x-1)^3 = -\frac{11}{3} + 6x - 3x^2 + \frac{2}{3}x^3 \tag{10}$$

– f(x)=$e^{x^2}(x-2)^2$ intorno a $x_0 = 0$
SOLUZIONE
Calcoliamo le derivate della funzione

$$f'(x) = 2e^{x^2}(x-2)(x-1)^2 \tag{11}$$

$$f''(x) = 2e^{x^2}(x-1)(2x^3 - 6x^2 + 7x - 5) \tag{12}$$

$$f'''(x) = 4e^{x^2}(2x^5 - 8x^4 + 17x^3 - 24x^2 + 18x - 6) \tag{13}$$

Il polinomio di Taylor fino al terzo ordine attorno ad $x_0 = 0$ lo possiamo scrivere come

$$P_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 \tag{14}$$

che sostituendo diventa

$$P_3(x) = 4 - 4x + 5^2 - 4x^3 \tag{15}$$

– f(x)=$\cos(\pi x + x^3)$ intorno a $x_0 = 0$
SOLUZIONE
Calcoliamo le derivate della funzione

$$f'(x) = -(3x^2 + \pi)\sin(\pi x + x^3) \tag{16}$$

$$f'(x) = -(3x^2 + \pi)^2 \cos(\pi x + x^3) - 6x \sin(\pi x + x^3) \tag{17}$$

$$f'''(x) = -18x(\pi + 3x^2)\cos(\pi x + x^3) - 6\sin(\pi x + x^3) + (\pi + 3x^2)^3 \sin(\pi x + x^3) \tag{18}$$

Il polinomio di Taylor fino al terzo ordine attorno ad $x_0 = 0$ lo possiamo scrivere come

$$P_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 \tag{19}$$

che sostituendo diventa

$$P_3(x) = 1 - \frac{\pi^2}{2}x^2 \tag{20}$$

- **Esercizio 2.** Consideriamo un filo di lunghezza L. Con questo filo vogliamo delimitare un triangolo rettangolo con angoli acuti di 45° e un rettangolo il cui rapporto tra i lati è 2:1. Trovare le aree delle due figure nel caso in cui la somma delle due aree sia minima.
  SOLUZIONE

  Chiamiamo x un cateto del triangolo rettangolo. Dato che gli angoli acuti del triangolo sono di 45°, avremo che anche l'altro cateto sarà lungo x, mentre l'ipotenusa sarà lunga $\sqrt{2}x$. Quindi per questa figura abbiamo che il perimetro e l'area saranno pari a

$$p_t = (2+\sqrt{2})x \tag{21}$$

$$A_t = \frac{x^2}{2} \tag{22}$$

  Chiamiamo invece y il lato corto del rettangolo. Avremo che area e perimetro di questa figura saranno pari a

$$p_r = 6y \tag{23}$$

$$A_t = 2y^2 \tag{24}$$

  I perimetri delle due figure devono essere ottenuti dal filo iniziale di lunghezza L. Di conseguenza otteniamo che

$$p_t + p_r = L \longrightarrow (2+\sqrt{2})x + 6y = L \tag{25}$$

  Da questa equazione possiamo trovare una relazione che lega i lati delle due figure, ovvero

$$y = \frac{L - x(2+\sqrt{2}}{6} \tag{26}$$

  Quindi, in funzione di x, l'area totale sarà pari a

$$A_{tot} = A_t + A_r = \frac{x^2}{2} + \frac{[L-(2+\sqrt{2})x]^2}{18} \tag{27}$$

  Vogliamo minimizzare l'area. Studiamo quindi la funzione A_{tot} in funzione di x. Calcolando la derivata e cercando i punti stazionari possiamo risolvere il problema

$$A'_{tot} = x - \frac{2+\sqrt{2}}{9}[L-(2+\sqrt{2}x] = 0 \tag{28}$$

  Il valore di x che risolve questa equazione è

$$x_0 = \frac{2+\sqrt{2}}{15+4\sqrt{2}}L \tag{29}$$

  Se si studia il segno della derivata si ottiene che questa è negativa per $x < x_0$ e positiva altrimenti. Quindi la funzione è prima decrescente e poi crescente, e quindi x_0 è un minimo. Sostituendo questo valore della x nelle due funzioni che individuano le aree delle due figure si risolve il problema.

- **Esercizio 3.** Data la parabola di equazione $y = x^2 + 2x$ e la retta $x - 2y - 6 = 0$ quale è il punto della parabola che ha la distanza minima dalla retta?
  SOLUZIONE
  Consideriamo un punto qualsiasi P della parabola di ascissa z. Questo avrà come coordinate $P = (z, z^2 + 2z)$. Vogliamo ora trovare di questo punto dalla retta. Questa distanza la possiamo vedere come la lunghezza del segmento PH perpendicolare alla retta che passa ha come estremi il punto P e il punto H sulla retta.
  Cerchiamo ora la lunghezza di questo segmento. Prima di tutto ci serve trovare una retta perpendicolare alla nostra. La generica retta perpendicolare a $x - 2y - 6 = 0$ è la retta $y = -2x + c$ dove c è una costante da determinare. Per determinarla imponiamo il passaggio di questa retta per il punto P e troviamo che questa retta, su cui giace il nostro segmento PH è la retta
  $$y = -2x + z^2 + 4z \tag{30}$$
  Abbiamo bisogno ora delle coordinate del punto H. Questo lo troviamo cercando l'intersezione tra le due rette. Vogliamo allora risolvere
  $$\begin{cases} y_H + 2x_H - z^2 - 4z = 0 \\ x_H - 2y_H - 6 = 0 \end{cases} \tag{31}$$
  questo sistema ha come soluzioni
  $$x_H = \frac{2}{5}(z^2 + 4z + 3) \quad y_H = \frac{1}{5}(z^2 + 4z - 12) \tag{32}$$
  Adesso che abbiamo le coordinate del punto H, possiamo scrivere la distanza PH, che è la distanza che dobbiamo minimizzare. Questa è
  $$PH = \sqrt{(x_P - x_H)^2 + (y_P - y_H)^2} = \sqrt{5}(2z^2 + 6 + 3z) \tag{33}$$
  (dopo un po' di semplificazioni). Vogliamo minimizzare la distanza, quindi facciamo la derivata rispetto a z
  $$\frac{d(PH)}{dz} = 2\sqrt{5}(4z + 3)(2z^2 + 3z + 6) \tag{34}$$
  che si annulla in $z = -3/4$ (si verifica facilmente che questo è un minimo). Quindi il punto P della parabola più vicino alla retta sarà il punto
  $$P = \left(-\frac{3}{4}, -\frac{15}{16} \right) \tag{35}$$
  N.B. Il problema poteva essere risolto anche usando la formula della distanza punto retta. Infatti dato un punto P di coordinate x_p e y_p e una retta di equazione $ax + by + c = 0$, la distanza punto retta si può scrivere direttamente come
  $$d = \frac{|ax_p + by_p + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{36}$$
  usando questa formula si ottiene direttamente l'equazione 33.

- **Esercizio 4.** La parabola di equazione $y = x^2 - 3x$ interseca gli assi nell'origine O e nel punto A. Trovare quale è il punto nell'arco OA con la distanza massima dall'origine.
  SOLUZIONE
  I punti O e A di intersezione della parabola con l'asse delle x sono l'origine e il punto A=(3,0). Tutti i punti della parabola sull'arco OA possiamo scriverli come $P = (a, a^2 - 3a)$ dove il parametro a, che indica l'ascissa può variare da 0 ad 3. La distanza dell'origine dal punto P generico la possiamo scrivere come

$$OP = \sqrt{x_p^2 + y_p^2} = a\sqrt{1 + (a-3)^2} = a\sqrt{a^2 - 6a + 10} \tag{37}$$

Vogliamo massimizzare la distanza. Quindi calcoliamo la derivata

$$\frac{d(OP)}{da} = \sqrt{a^2 - 6a + 10} + \frac{a(2a-6)}{2\sqrt{a^2 - 6a + 10}} = \frac{2a^2 - 9a + 10}{\sqrt{a^2 - 6a + 10}} \tag{38}$$

Studiamone il segno. Risolviamo quindi la disequazione

$$2a^2 - 9a + 10 > 0 \longrightarrow a < 2 \;\; \vee \;\; a > \frac{5}{2} \tag{39}$$

Questo ci dice che nell'intervallo che interessa, ovvero per $a \in [0, 3]$, la nostra distanza è crescente per $0 < a < 2$, decrescente per $2 < a < 5/2$ e crescente ancora per $5/2 < a < 3$. Quindi il valore massimo può essere assunto nel punto $a = 2$, poichè questo è massimo relativo della funzione, oppure nel punto $a = 3$, che si trova sul bordo dell'intervallo in cui stiamo cercando il massimo. Vediamo come per $a = 2$, $OP = 2\sqrt{2}$ mentre per $a = 3$, $OP = 3$. Dato che $3 > 2\sqrt{2}$, il massimo che stiamo cercando lo abbiamo per $a = 3$. Quindi il punto sull'arco OA più distante dall'origine è il punto (3,0), che corrisponde al punto A.

- **Esercizio 5.** Fissata la lunghezza di due lati di un triangolo, quale è l'area del triangolo più grande che si può costruire?
  SOLUZIONE
  Consideriamo un triangolo qualsiasi ABC, con un lato lungo a (AB) e uno lungo b (AC). Chiamiamo α l'angolo compreso tra a e b ovvero l'angolo $B\hat{A}C$.
  L'altezza del triangolo rispetto al lato a, non sarà altro che $b \sin \alpha$ dato che possiamo vederla come il cateto opposto all'angolo α del triangolo rettangolo ACH, dove H è il piede dell'altezza che va da C al lato opposto AB.
  Adesso conosciamo base e altezza del triangolo, quindi la sua area sarà

  $$A = \frac{1}{2} ab \sin \alpha \tag{40}$$

  Siccome a e b sono fissi, dobbiamo cercare quale deve essere l'angolo che massimizza l'area del triangolo (questo definirà completamente il triangolo poichè avremo fissato due lati e l'angolo tra loro compreso).

  $$\frac{dA}{d\alpha} = \frac{1}{2} ab \cos \alpha \tag{41}$$

  Sappiamo che l'angolo α, essendo un angolo interno di un atriangolo, non può essere maggiore di π. Quindi l'unica soluzione all'equazione $dA/d\alpha = 0$ la abbiamo per $\alpha = \pi/2$.
  Quindi fissate le lunghezze di due lati di un triangolo, il triangolo di area massima che possiamo costruire, è un triangolo rettangolo.

- **Esercizio 6.** Vogliamo costruire due aiuole rettangolari uguali. La somma delle due aree deve essere A. Attorno al perimetro esterno delle due aiuole vogliamo costruire una passerella di larghezza d, mentre tra le due aiuole ne vogliamo costruire una di larghezza 2d. Quali devono essere le dimensioni delle aiuole nel caso in cui l'area totale passerelle+aiuole sia minima?

  SOLUZIONE

  Chiamiamo x e y i lati delle aiuole rettangolari. Definiamo le dimensioni totali del nostro sistema.

  In una dimensione abbiamo che la lunghezza totale del sistema passerelle+aiuole sarà pari a $y + 2d$ dato che avremo solo due passerelle ai lati delle aiuole.

  Per quanto riguarda l'altro lato del sistema, dobbiamo sommare la larghezza della passerella laterale (d), la larghezza della prima aiuola (x), la larghezza della passerella tra le due aiuole (2d), la larghezza della seconda aiuola (x) e ancora la larghezza dell'altra passerella laterale (d). Quindi avremo che questo lato in totale sarà lungo $2x + 4d$. L'area del sistema sarà

  $$A = (y + 2d)(2x + 4d) \tag{42}$$

  Se vogliamo che la somma delle aree delle due aiuole da sole sia A, avremo che $A = 2xy$, quindi possiamo scrivere $x = A/2y$. In funzione della sola variabile x avremo allora

  $$A = 2xy + 4xd + 4yd + 8d^2 = A + 4\frac{Ad}{2y} + 4yd + 8d^2 \tag{43}$$

  Facciamo la derivata dell'area rispetto all'unica variabile y per trovare il minimo

  $$\frac{dA}{dy} = \frac{2d(2y^2 - A)}{y^2} \tag{44}$$

  che si annulla per $y = \sqrt{A/2}$ (si verifica facilmente che questo è un minimo). Quindi avremo che l'area totale è minima quando i lati dell'aiuola sono

  $$y = \sqrt{\frac{A}{2}} \qquad x = \frac{A}{2y} = \sqrt{\frac{A}{2}} \tag{45}$$

  quindi quando le due aiuole sono quadrate.