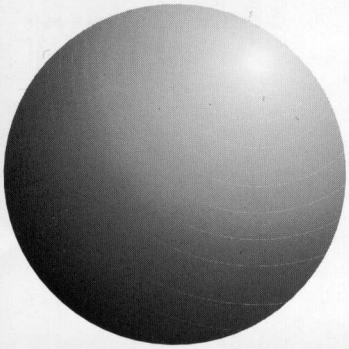
ISSN 0390-5543

Archimede

RIVISTA PER GLI INSEGNANTI E I CULTORI DI MATEMATICHE PURE E APPLICATE

ANNO LVIII APRILE-GIUGNO 2006

2/2006



in questo numero

IL PROBLEMA DI MUSTAFÀ

LA DIVISIONE CON RESTO E I NUMERI DECIMALI

UN PROGRAMMA DI MATEMATICA DELL'800

EUCLIDE, I NUMERI NATURALI E LA MISURA

NUMERI IN UN FOGLIO DI CARTA

002113
ARCHIMEDE - RIVISTA DI MATEMATICHE PURE E APPLICATE
2006 VOLUME 58 ISSUE 2
SISAC
0390-5543(2006)58:2;1-Q
ORDINE 142
SWETS 00606057212073
30791807

L E M O N N I E R

NUMERI IN UN FOGLIO DI CARTA

Partendo da alcune semplici domande legate alla forma rettangolare di un foglio di carta, si vogliono collegare le proprietà aritmetiche del rapporto tra i suoi lati con quelle geometriche evidenziabili mediante piegamenti della carta ed il taglio di sue porzioni quadrate.

Quale è il rapporto $\lambda > 1$ tra i lati di un normale foglio di carta per fotocopie, il cosiddetto formato «A4»? Per quale motivo ha le dimensioni che conosciamo? Che numeri è possibile ottenere a partire da tale foglio e prendendo come unità di misura il suo lato più corto?

Una risposta alle prime due domande dovrebbe essere ben nota ma vorremmo proporne una verifica senza misurazioni, con l'uso esclusivo di un foglio di carta (vedi in proposito [1], [2], [3], [4]).

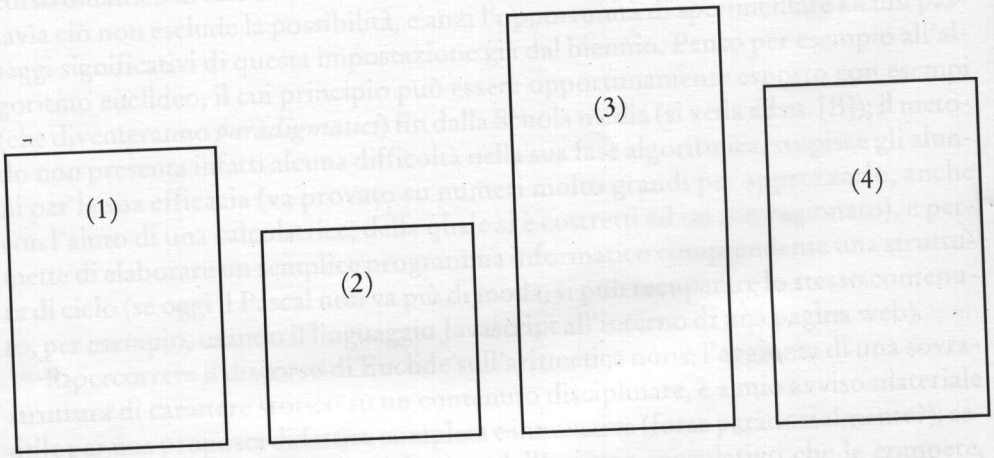


Figura 1

Per cominciare un piccolo test: in Figura 1 sono riportati quattro rettangoli, quale è quello più «bilanciato» (qualunque cosa questo voglia dire) come proporzioni? E perché?

Una risposta plausibile è (1). Questo rettangolo è simile al foglio A4: è una coincidenza? Siamo ormai troppo legati alla familiarità di un foglio di carta per fotocopie e stampanti oppure la scelta è stata fatta proprio perché il foglio appare così «equilibrato»?

A qualcuno forse è venuto il sospetto che λ possa essere la ben nota «sezione aurea» $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Non è così.

Per verificarlo si pieghi un foglio A4 di lati 1 e λ e come in Figura 2: il segmento $KC = \lambda - DK = \lambda - \frac{1}{2}$ dovrebbe, in tal caso, essere uguale a $\phi - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ e quindi a $KP = \sqrt{KQ^2 + QP^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2}$; ma se, con un ulteriore piegamento, si cercasse di sovrapporli (portando C su P come in Figura 2c) ci si accorgerebbe che $\lambda < \phi$ (il numero ϕ è invece il rapporto tra i lati del rettangolo (4)).

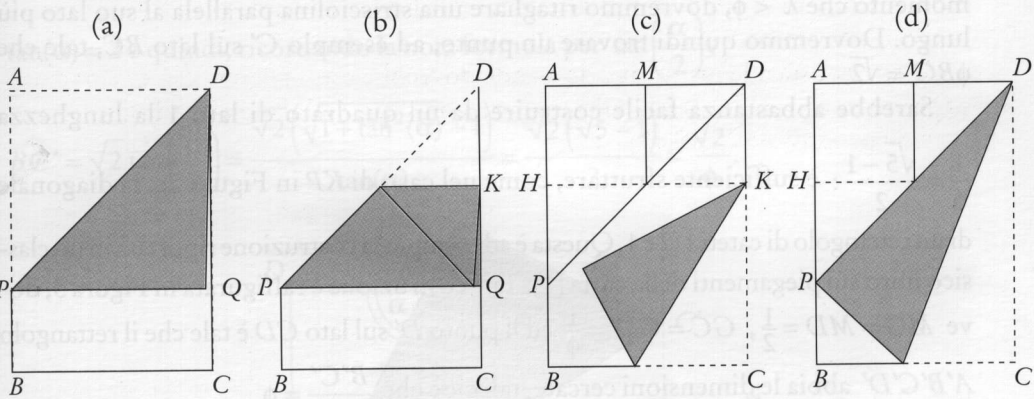


Figura 2

In effetti λ è uguale (con un margine di errore molto piccolo rispetto all'unità di misura adottata) ad un altro ben noto numero irrazionale (che non può cioè esprimersi come rapporto tra due numeri interi) quadratico (che sia soluzione di una equazione di secondo grado a coefficienti interi): $\sqrt{2}$. Per verificare tale affermazione è sufficiente piegare il foglio come in Figura 2a e poi verificare che DP (cioè la diagonale del quadrato $APQD$ di lato 1) è uguale a DC portando, come prima, C su P con una piega che passi però per D e non per K (Figura 2d).

Le dimensioni del foglio A4 non sono dunque legate ad una scelta «estetica» soggettiva: il motivo è molto più pratico ed oggettivo. Il numero $\sqrt{2}$ è infatti l'unica soluzione positiva della proporzione $x:1 = 1:\frac{x}{2}$ e permette quindi di ottenere un rettangolo simile a quello di partenza piegando il foglio a metà del suo lato più lungo, come per le pagine di un libro; dimezzando nuovamente il rettangolo così ottenuto è possibile iterare il procedimento. In questo modo si ottengono i formati A5, A6, … e analogamente è possibile accostare 2 fogli A4, sempre per il lato più lungo,

per ottenere un rettangolo simile, di formato A3, e poi di formato A2, A1 ed A0 o anche più grande.

La praticità di avere un rapporto tra i lati uguale a $\sqrt{2}$ è quindi legata alla produzione dei fogli di carta di formato diverso ma ottenibili tutti tagliando un grande foglio iniziale senza alcuno spreco. Risultano così fissate le proporzioni del foglio A4 ma non le misure che conosciamo: 210×297 mm (da notare che la differenza tra 297/210 e $\sqrt{2}$ è circa 0,00007). Per fissare le misure standard, necessariamente approssimate, dei diversi formati A0, A1, ... si usano i seguenti ulteriori criteri (*ISO* 216): l'area del formato A0 è di 1 m^2 e la misura dei lati è sempre fissata in un numero intero di millimetri. Il formato A0 è infatti di $841 \times 1189 = 999949$ mm^2, circa 16 volte quello di un foglio A4 ($210 \times 297 \times 16 = 997920$ mm^2) con uno scarto dello 0,2% .

Per costruire invece un rettangolo aureo (di lati 1 e ϕ) partendo dal foglio A4, dal momento che $\lambda < \phi$, dovremmo ritagliare una strisciolina parallela al suo lato più lungo. Dovremmo quindi trovare un punto, ad esempio C' sul lato BC, tale che $\phi BC' = \sqrt{2}$.

Sarebbe abbastanza facile costruire da un quadrato di lato 1 la lunghezza $\frac{1}{\phi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$: è sufficiente sfruttare, come nel caso di KP in Figura 2c, la diagonale di un rettangolo di cateti 1/2 e 1. Questa è ad esempio la costruzione riportata in un classico libro sui piegamenti della carta [1]. Tale costruzione è raffigurata in Figura 3, dove $MG = MD = \frac{1}{2}$, $GC = CD' = \frac{1}{\phi}$ ed il punto D' sul lato CD è tale che il rettangolo $A'B'C'D'$ abbia le dimensioni cercate, tali cioè che $\frac{B'C'}{C'D'} = \phi$.

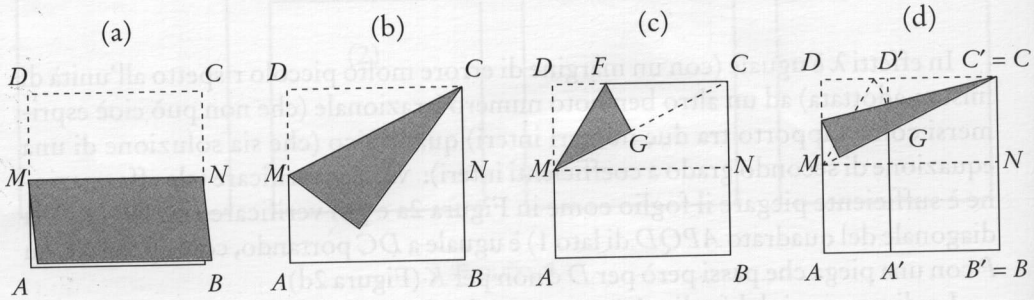


Figura 3

Nel nostro caso la costruzione appare complicata dal fattore $\sqrt{2}$, ma risulta essere addirittura più semplice con un piccolo accorgimento, valido per $\frac{\sqrt{5}}{2} < \lambda < \phi$. Procedendo come in Figura 4, con tre semplici piegamenti si ottiene $BC' = \frac{\sqrt{2}}{\phi}$.

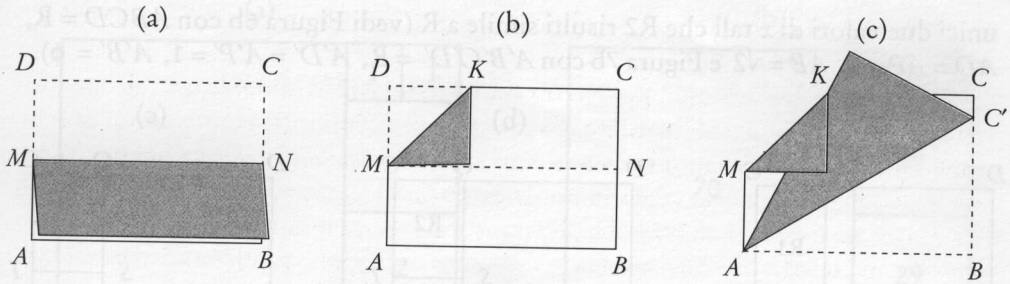


Figura 4

La dimostrazione di questa relazione si può dedurre dalla Figura 5: detto α l'angolo $A\hat{K}D$ e fissati $AD = 1$ ed $AB = \sqrt{2}$ si ha, per la costruzione di Figura 4, $DK = 1/2$, $\tan(\alpha) = 2$ e quindi, ricordando la nota formula per $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$,

$$BC' = \sqrt{2}\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}-1\right)}{\tan(\alpha)} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{5}-1\right)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{\phi}.$$

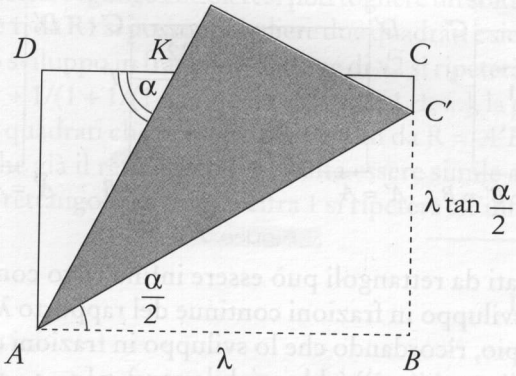


Figura 5

Ovviamente, essendo $\sqrt{2} < \phi$ sarebbe poi semplice passare da un foglio con rapporto tra i lati uguale a ϕ ad uno con rapporto nuovamente $\sqrt{2}$ individuando un punto del lato più lungo con due piegamenti analoghi alle figure 2a e 2d.

I due numeri irrazionali qui incontrati, $\sqrt{2}$ e $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, sono accomunati anche da una proprietà legata ai rettangoli con rapporto tra i lati $1 < x < 2$.

Immaginiamo da un tale rettangolo R di ritagliare un quadrato costruito sul lato più corto, come in Figura 6, ottenendo così un nuovo rettangolo R1 e di ripetere tale operazione una seconda volta ottenendo un rettangolo R2: $\sqrt{2}$ e ϕ sono gli

unici due valori di x tali che R2 risulti simile a R (vedi Figura 6b con $ABCD$ = R, $AD = AP = 1$, $AB = \sqrt{2}$ e Figura 7b con $A'B'C'D'$ = R, $A'D' = A'P' = 1$, $A'B' = \phi$).

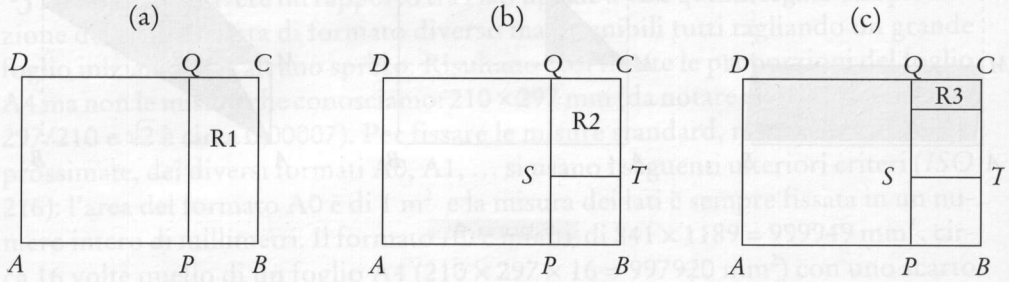


Figura 6

La verifica si può fare notando che per individuare un quadrato da ritagliare è sufficiente un piegamento del foglio lungo la diagonale, come in Figura 2a; per una dimostrazione basta risolvere rispettivamente le proporzioni $1 : x = (x-1) : (2-x)$ ed $1 : x = (2-x) : (x-1)$ dovute ad un diverso orientamento di R2 nei due casi.

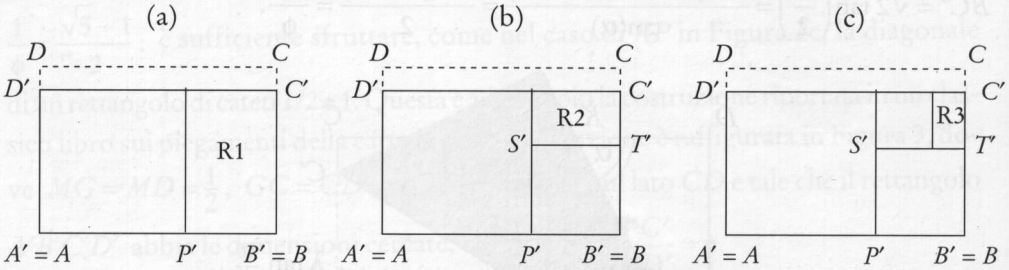


Figura 7

Tagliare quadrati da rettangoli può essere infine visto come rappresentazione geometrica dello sviluppo in frazioni continue del rapporto $\lambda > 1$ tra i lati del rettangolo. Ad esempio, ricordando che lo sviluppo in frazioni continue ha la forma $\lambda = a_0 + 1/(a_1 + 1/(a_2 + 1/(\ldots)))$ (abbreviabile con $\lambda = [a_0, a_1, a_2, \ldots]$), per $\lambda = \frac{7}{5}$ si ha

$$\frac{7}{5} = 1 + \frac{2}{5} = 1 + \frac{1}{\frac{5}{2}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} \equiv [1, 2, 2]$$

ed i quadrati da tagliare sono rappresentati in Figura 8a : si tratta, scegliendo opportunamente l'unità di misura, di un quadrato di lato 5 al primo passo, dal momento che $1 < \lambda < 2$ e quindi a_0=1, due quadrati di lato 2 al secondo passo (da notare che la scrittura di $\frac{2}{5} = \frac{1}{\frac{5}{2}}$ non cambia il rettangolo ma solo il rapporto tra i suoi lati) ed infine due quadrati di lato 1 (verificare che le misure standard del formato A4 danno 297/210 = 99/70 = [1, 2, 2, 2, 2, 2] come rappresentato in Figura 8b).

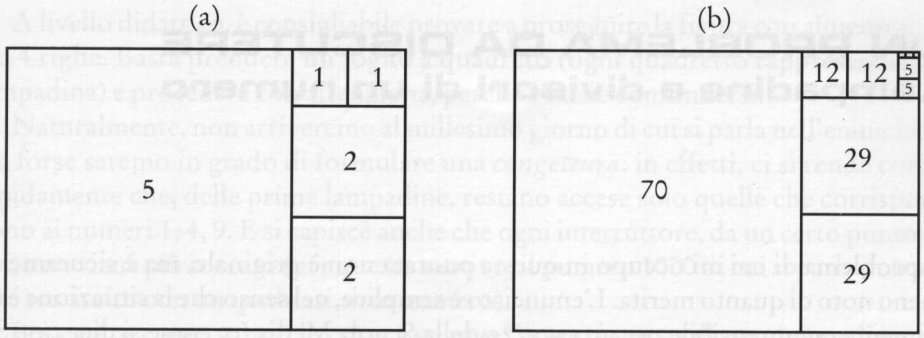


Figura 8

Il numero massimo di quadrati che si possono tagliare dal rettangolo dato corrisponde quindi alla prima cifra del suo sviluppo in frazioni continue. Il procedimento può essere iterato ed avrà termine se il rapporto considerato è razionale, sarà infinito se è irrazionale e, nel caso di uno sviluppo in frazioni continue periodico (come nel caso di un qualunque numero irrazionale quadratico [5]), dopo un numero di passi pari al periodo si ritroverà un rettangolo simile ad uno già considerato.

Nel primo caso, vedi ad esempio [6], $\sqrt{2} = 1 + 1/(2 + 1/(2 + 1/(2+\ldots))) \equiv [1, 2, 2, 2, \ldots]$, e riconosciamo dalla Figura 6 che da R si può togliere un solo quadrato e la prima cifra dello sviluppo è 1, da R1 si possono togliere due quadrati e siccome R3 è simile ad R1 il numero 2 nello sviluppo in frazioni continue di $\sqrt{2}$ si ripeterà all'infinito.

Nel caso di $\phi = 1 + 1/(1 + 1/(1 + 1/(1+\ldots))) \equiv [1, 1, 1, 1, \ldots]$, la prima cifra è ancora 1 come il numero di quadrati che possono essere tolti da R = $A'B'C'D'$ di Figura 7 e poi, dal momento che già il rettangolo R1 risulta essere simile ad R (proprietà che definisce in effetti il rettangolo aureo), la cifra 1 si ripeterà all'infinito.

Corrado Falcolini

Dipartimento di Matematica
Università Roma Tre
falco@mat.uniroma3.it

Bibliografia

[1] T. S. Row, *Geometric Exercises in Paper Folding*, Chicago: The Open Court Pub.Co., 1905, ristampato da Dover Pub.Inc., New York, 1966.

[2] B. Scimemi, *Algebra e geometria piegando la carta*, Matematica: gioco e apprendimento. Castel S. Pietro 16-18 novembre 1990 – a cura di B. D'Amore, Apeiron (1990) 79-87.

[3] M. Barlotti, *Archimede risponde*, Archimede, 3, (2004) 134-140.

[4] L. Canovi, *Origami: da un rettangolo di carta*, in Matematica: gioco e apprendimento. Castel S. Pietro 16-18 novembre 1990 – a cura di Bruno D'Amore, Apeiron (1990) 97-99.

[5] A. Ya. Khinchin, *Continued Fractions*, University of Chicago Press (1961).

[6] G. Pirillo, *Sulla frazione continua di* $\sqrt{2}$, Archimede, 4, (2005) 197-198.